非线性科学丛书

圆 映 射

陈式刚 编著

上海科技教育出版社

本书出版由上海市新闻出版局
学术著作出版基金资助

内 容 提 要

本书是"非线性科学丛书"中的一种，介绍圆映射及其描写的分岔与混沌行为。全书计分六章，即：圆映射描述的周期与准周期运动，圆映射的符号动力学，由准周期向混沌过渡的标度律，超临界圆映射的分岔行为与标度律，实际问题中的圆映射举例，作为圆映射在高维情况推广的环面映射。本书可供大学物理系、数学系教师，研究生和高年级学生阅读，也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考。

非线性科学丛书

圆 映 射

陈式刚 编著

上海科技教育出版社出版发行

（上海市冠生园路 393 号　　邮政编码：200233）

各地新华书店经销　　商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1168　1/32　　印张：6　　字数：153 000

1998 年 12 月第 1 版　　1998 年 12 月第 1 次印刷

印数：1－3200

ISBN 7－5428－1855－4/O·209　　定价：（精装本）12.40 元

非线性科学丛书

出版说明

现代自然科学和技术的发展，正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法．"数、理、化、天、地、生"这些曾经以纵向发展为主的基础学科，与日新月异的新技术相结合，使用数值、解析和图形并举的计算机方法，推出了横跨多种学科门类的新兴领域．这种发展的一个重要特征，可以概括为"非"字当头，即出现了以"非"字起首而命名的一系列新方向和新领域．其中，非线性科学占有极其重要的位置．这决非人们"想入非非"，而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升．

曾几何时，非线性还被人们当作个性极强，无从逾越的难题．每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法，运用新颖的技巧．诚然，力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程，物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型．不过，这些都曾是稀如凤毛鳞角的"手工艺"珍品，人们还没有悟出它们的普遍启示，也没有看到它们之间的内在联系．

20世纪60年代中期，事情从非线性现象的两个极端同时发生变化．一方面，描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算，揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质．这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径，即所谓"反散射"方法．反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念，反映了这类方程内秉的对称和保守性质．到了80年代，反散射方法推广到量子问题，发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系．

60年代初期还证明了关于弱不可积保守系统普遍性质的KAM定理.于是,非线性问题的可积的极端便清楚勾划出来,成为一个广泛的研究领域.虽然这里的大多数进展还只限于时空维数较低的系统,但它对非线性科学发展的促进作用是不可估量的.

另一方面,在"不可积"的极端,对KAM定理条件的"反面文章",揭示了保守力学系统中随机性运动的普遍性,而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例.这些研究迅速地融成一片,一些早年被认为是病态的特例也在新的观点下重新认识.原来不含有任何外来随机因素的完全确定论的数学模型或物理系统,其长时间行为可能对初值的细微变化十分敏感,同投掷骰子一样地随机和不可预测.然而,混沌不是无序,它可能包含着丰富的内部结构.

同时,由于计算科学特别是图形技术的长足进步,人们得以理解和模拟出许多过去无从下手研究的复杂现象.从随机与结构共存的湍流图象,到自然界中各种图样花纹的选择与生长,以及生物形态的发生过程,都开始展现出其内在的规律.如果说,混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为,则这些复杂系统要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程.标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术在这里起着重要作用.

在由上述种种方面汇成的非线性科学洪流中,许多非线性数学中早已成熟的概念和方法开始向其他学科扩散,同时也提出了新的深刻的数学问题.物理学中关于对称和守恒,对称破缺,相变和重正化群的思想,也在日益增多的新领域中找到应用."非线性"一词曾经是数学中用以区别于"线性"问题的术语,非线性科学正在成为跨学科的研究前沿.各门传统学科中都有自己的非线性篇章,非线性科学却不是这些篇章的总和.非线性科学揭示各种非线性现象的共性,发展处理它们的普适方法.

这样迅猛发展的跨学科领域,很难设想用少数专著加以概括,

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步. 于是,有了动员在前沿工作的教学和研究人员,以集体力量撰写一套"非线性科学丛书"的想法. 在上海科技教育出版社的大力支持下,这一计划得以付诸实现.

这套"非线性科学丛书"不是高级科普,也不是大块专著. 它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展,帮助大学高年级学生、研究生、博士后人员和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域,同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人员更新知识提供自学教材. 非线性科学的全貌将由整套丛书刻划,每册努力讲清一个主题,一个侧面,而不求面面俱到,以免失之过泛. 在写作风格上,作者们将努力深入浅出,图文并茂,文献丰富;力求有实质内容,无空洞议论,以真刀真枪脚踏实地武装读者. 从读者方面,自然要求具备理工科大学本科的数学基础,和读书时自己主动思索与推导的习惯.

"非线性科学丛书"的成功,取决于读者和作者的支持. 我们衷心欢迎批评和建议.

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

Abstract

In this book an introduction to Circle Maps is given. Topics include the fundamental properties and symbolic dynamics of circle maps, the scaling law for transition from quasiperiod to chaos, the bifurcation behavior and scaling law of supercritical circle maps, some examples for circle maps in physical reality, and the torus maps as a generalization of circle maps from one dimension to high dimension.



目　　录

Content

第 1 章

圆映射描述的周期与准周期运动

§1 圆映射的定义

周期外力作用下的弛豫振荡是一种常见的基本运动形式.例如强迫非线性振子，外加周期电流下的约瑟夫森结，外场驱动的电荷密度波，耦合振荡电路，周期外力作用下的贝纳德对流，窦房结驱动下心肌的搏动，一定条件下自激励的神经元等.这些运动通常可用三维相空间中的轨线来描述.如按外力的周期采样，可得一个二维映射.这二维映射在强耗散极限下成为一维映射，这个一维映射就是一种圆映射.

圆映射 的定义是：由满足关系式

$$f(x+p) = p+f(x) \qquad p \in \mathbb{Z} \quad (1.1)$$

的实函数 $f(x)$ 所表示的映射

$$x \to f(x). \quad (1.2)$$

如把 $f(x)$ 写作

$$f(x) = x + g(x), \quad (1.3)$$

则 $g(x)$ 是 x 的周期函数： $g(x+p)=g(x)$. 由于 $g(x)$ 是周期函数，相差整数的 x 可以看作是等价的，(1.2) 也可以写作

$$T: x \to f(x) \pmod 1. \tag{1.4}$$

在这个意义上， T 是圆到圆的映射 $S^1 \to S^1$, 简称 **圆映射**, 也称 **庞加莱映射**. 映射 (1.2) 与 (1.4) 虽然是等价的，但 (1.2) 是实轴上的映射，(1.4) 是圆上的映射. 为了表示这种差别，称 (1.2) 为 **圆映射的提升**.

(1.1) 还可推广为

$$f(x+p) = pN + f(x). \tag{1.5}$$

其中 N 是整数，称为相应的圆映射 (1.2) 或 (1.4) 的 **拓扑度**. $N=0$ 相当于一种区间映射. $|N|>1$ 的映射总有大于 0 的拓扑熵. $N=-1$ 的光滑映射总是通过倍周期分岔到达混沌. 最有物理意义的情况是 $N=1$, 它描写由准周期到混沌的转变，本书着重讨论 $N=1$ 的圆映射.

被研究得最多的圆映射是标准正弦圆映射

$$f_{\omega,k}(x) = x + \omega - (k/2\pi)\sin(2\pi x). \tag{1.6}$$

它所描述的系统是周期脉冲沿固定方向作用于其一定点上的有摩擦力与外加转矩的转子，曾作为周期强迫非线性振子模型而提出. 考虑如图 1-1 所示的有一周期性脉冲外力作用于其上的转子 [1]. 它的运动方程为

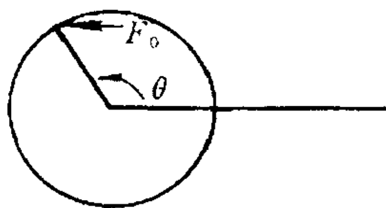


图 1-1

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega,$$

$$I\frac{d\omega}{dt}=\sum_n rF_0\sin\theta\delta(t-NT).$$

在外力周期 T 内对上式积分，得

$$I(\omega_{n+1}-\omega_n)=rF_0\sin\theta_n,\quad \theta_{n+1}-\theta_n=\omega_{n+1}T.$$

适当地重新定义变量与参数，上式可以写为

$$J_{n+1}=J_n+k\sin\theta_n,\quad \theta_{n+1}-\theta_n=\omega_{n+1}T. \tag{1.7}$$

(1.7) 称为标准映射，是保守系混沌理论中有现实背景的最基本的映射，是任意二维保守映射共振区的局部近似，因而有普适意义. 进一步考虑一耗散系统，设转子有外加力矩 M 与摩擦力矩 $-\gamma\omega$, 则运动方程成为

$$\begin{aligned}&\frac{d\theta}{dt}=\omega,\\&I\frac{d\omega}{dt}=M-\gamma\omega+\sum_n rF_0\sin\theta\delta(t-nT).\end{aligned}$$

作替换 $\omega=M/\gamma+\varOmega\, e^{-\gamma t/I}$, 上述第二式变为

$$I\frac{d\varOmega}{dt}=\sum_n rF_0e^{\gamma t/I}\sin\theta\delta(t-nT).$$

对运动方程积分，得

$$\begin{aligned}&I(\varOmega_{n+1}-\varOmega_n)=rF_0e^{\frac{\gamma}{I}nT}\sin\theta_n,\\&\theta_{+1}-\theta_n=MT/\gamma+\varOmega_{n+1}\frac{I}{\gamma}\left(1-e^{\frac{-\gamma}{I}T}\right)e^{\frac{-\gamma}{I}nT}.\end{aligned}$$

将 $\varOmega_n=\left(\omega_n-\dfrac{M}{\gamma}\right)e^{\frac{\gamma n}{I}T}$ 代入，重新定义变量与参数后，得

$$J_{n+1}-1=\lambda(J_n-1)-(k/2\pi)\sin(2\pi\theta_n),$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega + J_{n+1} - 1. \tag{1.8}$$

式中 $\lambda = e^{\frac{-\gamma}{I}T}$, $\omega = MT/2\pi\gamma$, $k \propto rF_0$ 为参量. 式 (1.8) 的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(J_{n+1}, \theta_{n+1})}{\partial(J_n, \theta_n)} = \lambda,$$

所以 λ 为映射 (1.8) 的收缩因子. 在强耗散的极限情况 $\lambda = 0$, 可从 (1.8) 中消去 J, 得到

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega - \frac{k}{2\pi}\sin(2\pi\theta_n),$$

此即映射 (1.6). 由推导过程可知, ω 为外力周期与无脉冲外力时转子周期之比, k 代表周期脉冲外力与转子的耦合强度.

当 $f(x)$ 是 x 的连续单调函数, 例如正弦圆映射 (1.6) 中的 $|k| \leq 1$ 时, 可对 f 的序列

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{1.9}$$

唯一地定义转数

$$\rho(f) = \lim_{n\to\infty}(x_n - x_0)/n. \tag{1.10}$$

以后将可看到, 它与初值 x_0 无关. $\rho(f)$ 是转子转数与外力周期数之比. $\rho(f)$ 是有理数时, 系统作周期运动; $\rho(f)$ 是无理数时, 系统作准周期运动. 当 f 由单调变为非单调时, 准周期运动首先变成混沌运动. 因此圆映射被作为由准周期向混沌转变的典型系统来研究, 其转变临界点处的标度律对于这类转变具有普适性.

茹厄勒 (D. Ruelle) 和塔肯斯 (F. Takens) 曾提出三频准周期向混沌过渡的机制 [2],[3], 称为"通向混沌的茹厄勒 - 塔肯斯之

路”. 其论证向混沌过渡的思路是：三频准周期由三维环面 T^3 描述，如以其中之一的周期采样，则得一二维映射；对其作扰动，可以产生混沌运动. 这种思路与前面所述的论证二频准周期向混沌过渡的思路相同. 不同的是，我们的研究都是基于物理定律的，物理规律的基础是牛顿力学. 牛顿力学中的一个自由度由两个变量描述，因此二频准周期也要用三维空间描述. 这样，不一定要有三频准周期，二频准周期也会过渡到混沌.

以后将可看到，三频准周期向混沌过渡时不存在标度律. 一般地说，标度律具有普适性. 二频准周期向混沌过渡时具有标度律，因此，对它的研究有更基本的意义.

§2 可逆圆映射

连续单调圆映射是可逆的. 对于可逆圆映射，通过庞加莱 (H. Poincare)[4] 与 A. Denjoy[5] 的经典工作，已有了透彻的了解. 下面引用几个定理表述它的性质 [6].

定理 1 对单调圆映射 $T: x \to f(x) \pmod 1$, 存在与初值 x_0 无关的极限 (1.10), 即转数 $\rho(f)$, 当且只当对某正整数 n, $f^{(n)}(x)$ 有不动点时， $\rho(f)$ 为有理数.

证明 先设至少有一 x_0 使极限 (1.10) 存在. 选任意 $x \in \mathbb{R}^1$, 取整数 m 使

$$x_0 + m \le x \le x_0 + m + 1.$$

因为对任意 n, $f^{(n)}(x)$ 是单调的，据 (1.3) 有

$$f^{(n)}(x_0) + m \le f^{(n)}(x) \le f^{(n)}(x_0) + m + 1.$$

让 $n \to \infty$, 即知初值为 x 的极限 (1.10) 与初值为 x_0 的极限相同. 所以转数不依赖于 x_0.

现证对某些 x_0, 极限 (1.10) 存在. 首先考虑 $f^{(q)}(x)$ 有不动点 $f^{(q)}(x_0) = x_0 \pmod 1$ 的情况, 即 $f^{(q)}(x_0) = x_0 + p$, p 为整数. 则对任意整数 m, 有

$$f^{(mq)}(x_0) = x_0 + mp.$$

任意正整数 n 可表示为 $n = mq + l$, 其中 $q \geq 0$, 于是

$$f^{(n)}(x_0) = f^{(l)}(x_0) + mp.$$

所以

$$\frac{f^{(n)}(x_0) - x_0}{n} = \frac{f^{(l)}(x_0) - x_0}{n} + \frac{mp}{mq + l} \to \frac{p}{q}.$$

即 $\rho(f)$ 存在, 且为有理数.

如对任意正整数 q, $f^{(q)}(x)$ 无不动点, 则仍应有整数 p 使

$$x + p < f^{(q)}(x) < x + p + 1.$$

为简单起见, 设 $x_0 = 0$, 则有

$$p < f^{(q)}(0) < p + 1, \qquad mp < f^{(mq)}(0) < m(p + 1),$$

所以

$$\left| \frac{f^{(mq)}(0)}{mq} - \frac{f^{(q)}(0)}{q} \right| < \frac{2}{q}.$$

这里 m 与 q 是任意的, 所以极限 $\rho(f)$ 也存在, 且对任意 x_0 都存在.

最后要证, 如 ρ 是有理数, 则对某正整数 q, $f^{(q)}(x)$ 有不动点. 首先设 $\rho = 0$ 且 $f(x) - x \neq 0$. 可假设 $f(x) > 0$, 那么易知

$f^{(n)}(0)$ 是 n 的单调增序列. 进一步, 可知 $f^{(n)}(0)$ 有界, 否则 $\rho \neq 0$. 因此 $f^{(n)}(0)$ 存在极限, 设为 x_0, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(0) = x_0$. 这 x_0 就是 $f(x)$ 的不动点: $f(x_0) = x_0$.

如 ρ 为有理数, 可构造 $g(x) = f^{(q)}(0) - p$, 其转数为 0, 可以利用上面特例的结果. 因此有 x_0, 使 $f^{(q)}(x_0) = x_0 + p$. □.

为了讨论映射的连续性, 定义映射间的 **距离**

$$\operatorname{dist}(f_1, f_2) = \sup_{x\in S^1} \operatorname{dist}(f_1(x), f_2(x)) + \sup_{x\in S^1} \operatorname{dist}(f_1^{-1}(x), f_2^{-1}(x)). \tag{2.1}$$

定理 2 $\rho(f)$ 是 f 的连续函数.

证明 设有 $\varepsilon > 0$ 、自然数 $k > 1/\varepsilon$ 与整数 p, 使

$$\frac{p}{k} < \rho(f_0) < \frac{p+1}{k}. \tag{2.2}$$

据 (2.2), 对任意 x 有

$$x + p < f_0^{(k)}(x) < x + p + 1. \tag{2.3}$$

否则, 将可找到 x_0, 使 $f_0^{(k)}(x_0) = x_0 + p$ 或 $f_0^{(k)}(x_0) = x_0 + p + 1$, 使 $\rho(f_0) = \dfrac{p}{k}$ 或 $= \dfrac{p+1}{k}$, 这与假设 (2.2) 矛盾. 因此, 存在 η, 使

$$p + \eta < f_0^{(k)}(x) - x < p + 1 - \eta.$$

据 (2.1), 存在 f 与 $\delta > 0$, 使 dist $(f_0, f) < \delta$ 时

$$|f^{(k)}(x) - f_0^{(k)}(x)| < \eta. \qquad x \in \mathbb{R}$$

对这样的 f, 有

$$p < f^{(k)}(x) - x < p + 1.$$

所以, 有

$$\frac{p}{k} < \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n} < \frac{p+1}{k}.$$

即

$$\left|\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n}-\rho(f_0)\right|<\frac{1}{k}<\varepsilon. \qquad \square$$

对于圆映射 (1.6), ρ 是 ω 与 k 的函数： $\rho=\rho(\omega,k)$. 定理 2 表明，当 $|k|\le 1$ 时 $\rho(\omega,k)$ 是 ω 与 k 的连续函数.

对于准周期或混沌轨道，可以定义 S^1 的不变测度. 首先定义 S^1 的分布函数

$$p(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\delta(x-x_n). \tag{2.4}$$

在映射 $T:x\to f(x)$ 下， $x_n\to x_{n+1}$, 因此 $p(x)$ 在映射 f 下是不变的： $Tp(x)=p(x)$. 据 (2.4), 可定义不变测度

$$\mu(dx)=p(x)dx. \tag{2.5}$$

定理 3 (1) 如 $\rho(f)$ 是无理数, 则存在连续映射 $\phi:S^1\to S^1$,

$$\phi(f(x))=R_\rho(\phi(x)),$$

将 f 变换为转动

$$R_\rho x=x+\rho(f)\pmod 1. \tag{2.6}$$

(2) 当且仅当任一 $x\in S^1$, $f^{(n)}(x)$ 在 S^1 上稠密时， ϕ 是 S^1 至自身的一一映射.

证明 (1) 选择 $\phi(x)=\mu([0,x])$. 对任意 $x_1,x_2,x_3\in S^1$, 有 $\mu([x_1,x_3])=(\mu([x_1,x_2])+\mu([x_2,x_3]))\pmod 1$. 这里，当 $b<a$ 时， $[a,b]$ 表示 $[a,1)\cup[0,b]$. 由此得：对任意 $x\in S^1$, 有

$$\phi(f(x))=\mu([0,f(x)])=(\mu([0,f(0)])+\mu([f(0),f(x)]))\pmod 1$$

$$=(\mu([0,f(0)])+\mu([0,x])) \pmod 1$$

$$=(\phi(x)+\phi(f(0))) \pmod 1.$$

此即所要求的简单转动. 现证 $\phi(f(0))=\rho(f)$. 据测度的不变性,

$$\begin{aligned}\phi(f(0)) &=\mu([0,f(0)])=\mu([f(0),f^{(2)}(0)])=\cdots \\ &=\frac{1}{n}\mu([0,f^{(n)}(0)])=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mu([0,f^{(n)}(0)]) \\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n}=\rho(f).\end{aligned}$$

定理第一部分得证.

(2) 因为 $f^{(n)}(x)$ 稠密且 $\mu([0,x])$ 是严格单调的, 所以 $\phi(x)$ 是连续单调的, 即 $S^1\to S^1$ 的一一映射. □

对于连续可微映射, 上述定理可陈述得更为明确. 这时, 有 Denjoy 定理:

Denjoy 定理 具有无理数转数 $\rho(f)$ 的圆映射 $f(x)$ 在 S^1 上有连续导数 $f'(x)>0$, 且 $\ln f'(x)$ 在 $[0,1)$ 内有界, 则 f 拓扑共轭于转动 R_ρ,

$$\phi(f(x))=R_\rho(\phi(x)). \tag{2.7}$$

证明 据定理 3, 只要 $f^{(n)}(x)$ 在 S^1 上稠密, Denjoy 定理就成立. 用反证法. 设有 Δ_0 区间不属于极限集合 $p=\{f^{(n)}(x_0)\}$, 则 Δ_0 的 k 次映射 Δ_k 也不属于 p (其中 $k=0,\pm1,\cdots$). 并且, 如果 $k_1\neq k_2$, 则 $\Delta_{k_1}\neq\Delta_{k_2}$. 如 $\ln f'(x)$ 有界, 则所有 Δ_k 都有界, 这样, Δ_k 的长度之和可任意大, 这显然不对, 因此 $p=S^1$. 据定理 3, 有 ϕ 使 (2.7) 成立, 且 ϕ 是 S^1 至自身的同胚. □

由 Denjoy 定理的证明可见, 具有无理数转数的单调光滑圆映射在 S^1 上是遍历的, 极限集合即是 S^1. 具有有理数转数光

滑圆映射的极限集合只是有限个点. Denjoy 定理的另一个直接推论是：具有无理数转数的可逆圆映射的李雅普诺夫指数为 0. 这是因为拓扑共轭变换保持李雅普诺夫指数不变，而转动 R_ρ 是一线性圆映射，其李雅普诺夫指数为 0.

§3 法里树的数论与法里序列的符号表示

标准正弦圆映射 (1.6) 的拓扑性质与标度律具有普适性. 本书许多地方都以它为例子来进行讨论. 对圆映射 (1.6) 来说，随参数 k 值的增加 (在 $|k| \le 1$ 条件下), ω 轴上有理数转数 $\rho(f) = \rho(\omega, k) = p/q$ 所占的区间越来越大. 而且 q 越小，区间越大. 有理数的法里树组织能反映这种特性 [7], 法里级越高， q 越大，ω 轴上所占区间越小.

法里树用法里和来构造. 设 p/q 与 p'/q' 是分子与分母互质的两个有理数，“法里和” 运算 $\oplus$ 的定义是

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'} = \frac{p+p'}{q+q'}. \tag{3.1}$$

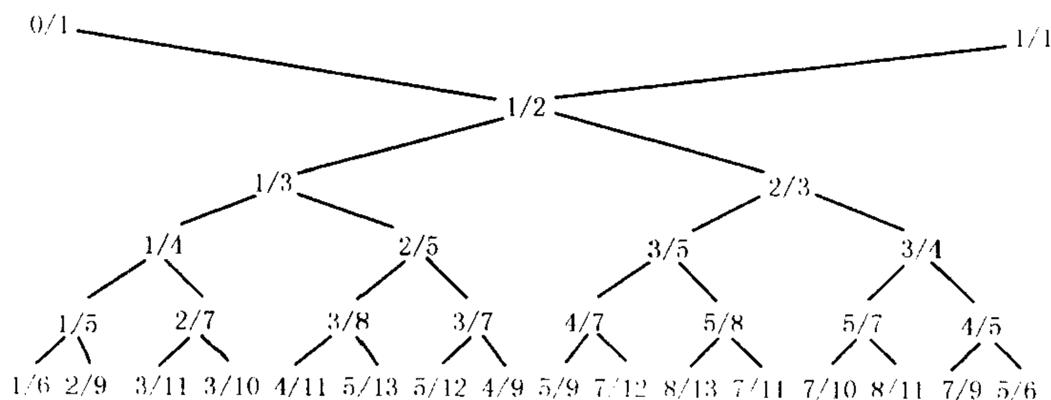


图 3-1

定义 0/1 与 1/1 为法里树上的 -1 级元素，则由 (3.1) 得法里树上 0 级的元素 $0/1 \oplus 1/1 = 1/2$. 再利用 (3.1) 于已有的相邻有理数对上，得 1 级元素 $0/1 \oplus 1/2 = 1/3$ 与 $1/2 \oplus 1/1 = 2/3$. 如此继续下去，得到如图 3-1 所示的法里树.

易见，法里树上 p/q 的分子与分母互质且只出现一次. 不计 -1 级，n 级有 2^n 个元素，关于中线对称的相应两元素之和为 1. 因此，k 级元素总和为 2^{n-1}.

一个有理数可用有限连分数表示：

$$p/q = [n_0, n_1, \cdots, n_N] \equiv 1/(n_0 + 1/(n_1 + 1/(n_2 + \cdots\cdots))). \quad (3.2)$$

根据这个定义，连分数有两个等价的表示

$$[n_0, n_1, \cdots, n_N] = [n_0, n_1, \cdots, n_N - 1, 1]. \quad (3.3)$$

图 3-1 的法里树可以用连分数表示成图 3-2.

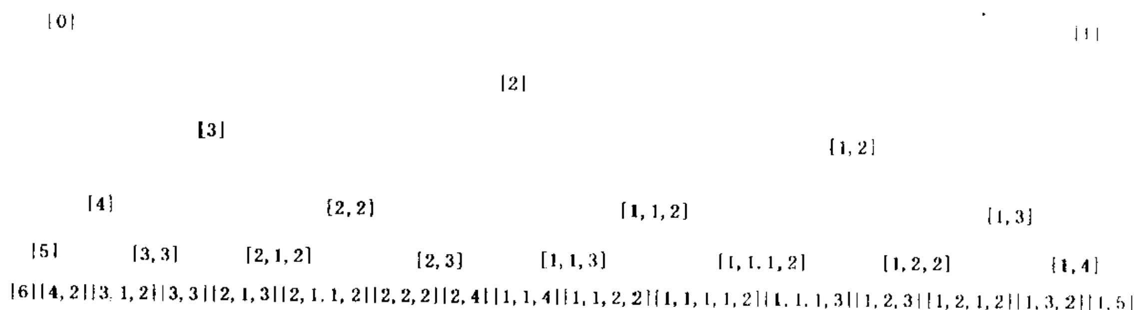


图 3-2

由图 3-2 可见，法里树上 n 级元素的连分数表示的 n_i 之和都为 $\sum_{i=0}^{N} n_i = n + 2$. 在法里树上，由上一级到下一级，任一数 (母) 生成两个数 (女), 相应的连分数之间由下述规则联系：

规则 0 $[n_0, n_1, \cdots, n_N] \to [n_0, n_1, \cdots, n_N + 1]$,

规则 1 $[n_0, n_1, \cdots, n_N] \to [n_0, n_1, \cdots, n_N - 1, 2].$ (3.4)

这两个规则应交错地运用，任一级上其排列的顺序是

$$0110011 \cdots\cdots 0110.$$

对法里树上的元素 x, 还可以定义法里地址 B_F[8]. 每一母亲的两个女儿，左边的以 0 表示，右边的以 1 表示，空对应 1/2, 例如 $B_F(1/2) = \langle\ \rangle$ 为 0 级元素， $B_F(1/3) = \langle 0 \rangle$ 为 1 级左边元素， $B_F(2/3) = \langle 1 \rangle$ 为 1 级右边元素， $B_F(3/8) = \langle 0, 1, 0 \rangle$ 为 3 级元素，由 1/2 到达它的路径为：左，右，左. 对 1/2 的对称性可表示为

$$\begin{aligned} B_F(x) &= \langle I_0, I_1, \cdots, I_n \rangle, \\ B_F(1-x) &= \langle 1 - I_0, 1 - I_1, \cdots, 1 - I_N \rangle. \end{aligned} \tag{3.5}$$

定义 B_F 的逆算符 $b_F \equiv B_F^{-1}$, 即

$$x = b_F \langle I_1, \cdots, I_n \rangle. \tag{3.6}$$

例如 $b_F\langle\ \rangle = 1/2$, $b_F\langle 0, 0, 1 \rangle = 2/7$. 下面定义一个移位算符. 当转数 $\rho > 1/2$ 时，如果

$$\rho = p/q = b_F \langle 1, I_1, I_2, \cdots, I_K \rangle, \tag{3.7}$$

则由图 3-1 可见

$$b_F \langle I_1, I_2, \cdots, I_k \rangle = 2 - 1/\rho; \tag{3.8}$$

对 $\rho < 1/2$, 如果

$$\rho = p/q = b_F \langle 0, I_1, I_2, \cdots, I_K \rangle, \tag{3.9}$$

则

$$b_F\langle I_1, I_2, \cdots, I_K\rangle = \rho/(1-\rho). \tag{3.10}$$

合在一起，如定义算符 t^F 对转数 ρ 的作用为

$$t^F(\rho) = \begin{cases} t_0^F(\rho) = \rho/(1-\rho), & \text{如果 } \rho < 1/2; \quad (3.11a) \\ t_1^F(\rho) = 2 - 1/\rho, & \text{如果 } \rho > 1/2, \quad (3.11b) \end{cases}$$

则它对法里地址有移位的作用

$$t^F(b_F\langle I_0, I_1, \cdots\rangle) = b_F\langle I_1, I_2, \cdots\rangle. \tag{3.12}$$

如果定义对称算符 $r(x) = 1 - x$, 则易见有对称关系

$$rr(x) = x, \quad rt_0^F r = t_1^F, \quad rt_1^F r = t_0^F. \tag{3.13}$$

利用移位算符 (3.12), 可以由 ρ 计算其法里地址 $B_F(\rho) = \langle I_0, I_1, I_2, \cdots, I_N\rangle$: 设 $k = 0$ 时 $\rho_0 = \rho$, 且 $\rho_k \neq 1/2$, 如 $\rho_k < 1/2$ 则 $I_k = 0$, 如 $\rho_k > 1/2$ 则 $I_k = 1$, 让 $\rho_{k+1} = t_{I_k}^F(\rho_k)$, 递推即得 $B_F(\rho)$, 如 $\rho_k = 1/2$ 即终止. 反之，给定 $\langle I_0, I_1, I_2, \cdots, I_N\rangle$ 也可算出 $\rho = b_F\langle 0, I_1, I_2, \cdots, I_N\rangle$: 把上述过程倒过来，设 $k = N$ 时 $\rho = 1/2$, 对 k 由 N 至 0, 如 $I_k = 0$ 则 $\rho/(1+\rho) \to \rho$, 如 $I_k = 1$ 则 $1/(2-\rho) \to \rho$, 至 $k = 0$ 得 ρ, 这里 ρ 的变换是 t^F 之逆. 定义法里矩阵

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{与} \quad F_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

可见

$$F_1\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 2q-p \end{pmatrix}, \quad \text{即} \quad F_1(\rho) = 1/(2-\rho); \tag{3.15a}$$

$$F_0\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ p+q \end{pmatrix}, \quad \text{即} \quad F_0(\rho) = \rho/(1+\rho). \tag{3.15b}$$

于是，由 $\langle I_0, I_1, I_2, \cdots, I_N\rangle$ 求 $\rho = b_F\langle I_0, I_1, I_2, \cdots, I_N\rangle = p/q$ 的过程，可由下式给出：

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = F_{I_0} F_{I_1} \cdots F_{I_N} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

现在可以给出连分数表示与法里地址表示之间的关系．定义连分数移位算符 $t_n^{cf}(\rho) = 1/\rho - n$, 利用 (3.11) 可以把它表示为

$$t_n^{cf} = r t_1 (t_0)^{n-1}. \tag{3.17}$$

这里省掉了定义 (3.11) 中的上标 F. 设 $x = [n_0, n_1, \cdots, n_N]$, 显然，这个连分式满足

$$t_{n_N}^{cf} \cdots t_{n_1}^{cf} t_{n_0}^{cf}(x) = 0. \tag{3.18}$$

利用 (3.18) 与 (3.13), 得

$$(t_1)^{n_N - 1} \cdots [(t_0)^{n_4} (t_1)^{n_3}][(t_0)^{n_2} (t_1)^{n_1}](t_0)^{n_0 - 1} = 0. \tag{3.19}$$

因为根据 (3.3), 总可以把连分式表示写成为偶数位的, 所以 (3.19) 中已设 N 为奇数 (加 0 指标位，总长度为偶数). 最后一个因子 $r t_1 r = t_0$ 作用在 0 上仍为 0, 已经去掉．(3.16) 表明一次移位 t_0 或 t_1 对应法里地址中的一个元素，因此由 (3.19) 得连分数与法里地址之间的对应关系：

$$[n_0, n_1, n_2, \cdots, n_N] \longleftrightarrow \langle 0^{n_0 - 1}(1^{n_1} 0^{n_2})(1^{n_3} 0^{n_4}) \cdots 1^{n_N - 1}\rangle. \tag{3.20}$$

其中 N 是奇的, 上标表示 0 或 1 的重复数. 由此, 不用图 3-1, 也可由 ρ 直接算出其法里地址. 例如 $\rho = 3/8 = [2, 1, 2] = [2, 1, 1, 1]$, 由 (3.20) 得 $B_F(3/8) = \langle 0, 1, 0\rangle$, 与图 3-1 一致.

最后，我们要研究以下法里序列中轨道的符号表示. 如图 3-3 所示.

在 mod 1 之下映象分为两支，记为 R 与 L. 一个 R 字母表示一次 mod 1 作用，所以转数可表示为

$$\rho = n_{\mathrm{R}}/(n_{\mathrm{L}} + n_{\mathrm{R}}). \tag{3.21}$$

其中 n_{L} 与 n_{R} 分别是 L 与 R 上的点数. 图 3-3 轨道的符号表示为 $\mathrm{RL}^2\,\mathrm{RL}^3$, $\rho = 2/7$. 法里序列轨道的符号表示不随映射由线性变成非线性而变化，因此很容易由线性圆映射图求得轨道的符号表示. 根据 (3.14) 式与 (3.15) 式及图 3-3, 可以提出如下一个关于符号的法里变换,

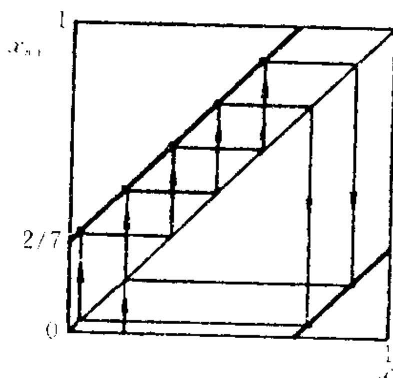


图 3-3

$$\mathcal{F}_0: \qquad \mathrm{R} \to \mathrm{R\,L}, \quad \mathrm{L} \to \mathrm{L}; \tag{3.22a}$$

$$\mathcal{F}_1: \qquad \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad \mathrm{L} \to \mathrm{RL}. \tag{3.22b}$$

这个变换刚好使转数 (3.21) 作 (3.14) 所示的逆变换. 因此与 (3.15) 对应，法里地址为 $\langle I_0, I_1, \cdots, I_N\rangle$ 的轨道的符号表示为

$$\mathcal{F}_{I_0}\mathcal{F}_{I_1}\cdots\mathcal{F}_{I_N}(\mathrm{RL}). \tag{3.23}$$

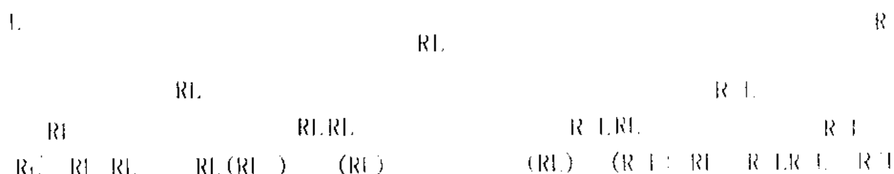


图 3-4

直接作图与严格的符号动力学都证实了这个结论. 图 3-4 给出了法里序列中开头几级元素的 R, L 符号表示.

§4 正弦圆映射参数平面上的相结构

本节以正弦圆映射为例, 介绍其参数平面 (ω, k) 上的锁相结构 [9]. 圆映射 (1.6) 的 p/q 周期轨道 $x_1, x_2, \cdots, x_q = x_1 + p$ 的稳定性条件是

$$\left|\frac{df_{\omega,k}^{(q)}(x_i)}{dx_i}\right| = \prod_{i=1}^{q} |f'_{\omega,k}(x_i)| < 1, \tag{4.1}$$

稳定区的边界决定于

$$\left|\frac{df_{\omega,k}^{(q)}(x_i)}{dx_i}\right| = 1. \tag{4.2}$$

为了求解稳定区边界, 还要利用周期轨道条件

$$f_{\omega,k}^{(q)}(x_i) = x_i + p. \tag{4.3}$$

定义函数

$$\begin{aligned} g_1(x,\omega) &= f_{\omega,k}^{(q)}(x) - x - p, \\ g_2(x,\omega) &= \left|\frac{df_{\omega,k}^{(q)}(x)}{dx}\right| - 1, \\ \boldsymbol{g}(x,\omega) &= \begin{pmatrix} g_1(x,\omega) \\ g_2(x,\omega) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

对给定的 k, ω 轴上 p/q 轨道的稳定区边界决定于

$$\boldsymbol{g}(x^*, \omega^*) = 0. \tag{4.5}$$

这个方程可用牛顿迭代法求解. $\left|\frac{df^q}{dx}\right| = \pm\frac{df^q}{dx}$, 其中 ± 号对应 ω 轴上 p/q 区间的两个端点. 下面以 $\Delta\omega(p/q)$ 表示这区间. 在 $\Delta\omega(p/q)$ 中存在超稳定的 p/q 轨道, 它由

$$\frac{df_{\omega,k}^{(q)}(x_i)}{dx_i} = 0, \quad f_{\omega,k}^{(q)}(x_i) = x_i + p \tag{4.6}$$

确定.

下面以 0/1 轨道为例, 计算其稳定区边界与超稳定轨道. 这个例子可以解析地求解. 求解 (4.5), 并消去 x_1, 得

$$1 - \sqrt{k^2 - (2\pi\omega)^2} = \pm 1. \tag{4.7}$$

右端取 +1, 得 $\omega = \pm\frac{k}{2\pi}$; 右端取 −1, 得 $\omega = \pm\sqrt{\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 - \left(\frac{1}{\pi}\right)^2}$. 所以, 当 $k < 2$ 时, $\Delta\omega(0/1) = \left(-\frac{k}{2\pi}, \frac{k}{2\pi}\right)$; 当 $k \geq 2$ 时, 稳定区分成两个区间

$$\begin{aligned}\Delta\omega(0/1)_{\mathrm{L}} &= \left(-\frac{k}{2\pi}, -\frac{k}{2\pi}\sqrt{1-\left(\frac{2}{k}\right)^2}\right),\\ \Delta\omega(0/1)_{\mathrm{R}} &= \left(+\frac{k}{2\pi}\sqrt{1-\left(\frac{2}{k}\right)^2}, \frac{k}{2\pi}\right),\end{aligned} \tag{4.8}$$

超稳定轨道位于

$$\omega = \pm\sqrt{\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2}. \tag{4.9}$$

(ω, k) 平面上由 $\Delta\omega(0/1) = \left(-\frac{k}{2\pi}, \frac{k}{2\pi}\right)$ 给出的区域, 称为转数为 0/1 的阿诺尔德舌头; $\Delta\omega(0/1)_{\mathrm{L}}$ 与 $\Delta\omega(0/1)_{\mathrm{R}}$ 给出的区域是转数为 0/1 的稳定区.

对不可逆圆映射 (即 (1.6) 的 $k > 1$ 时), 当 f 给定后 $\rho(f)$ 还是初始值 x 的函数, 不同的 x 有不同的转数 $\rho = \rho(f, x)$, 因此宜

引入转数区间的概念. 定义非减映射

$$f_+(x)=\sup_{x'\le x} f(x),\quad f_-(x)=\inf_{x'\ge x} f(x'). \tag{4.10}$$

据 §2 的定理, 它们都有唯一的转数 $\rho(f_-)$ 与 $\rho(f_+)$. 显然, 有

$$\rho(f_-)\le\rho(f,x)\le\rho(f_+).$$

$[\rho(f_-),\rho(f_+)]$ 称为映射 f 的 **转数区间**. 显然, 次临界圆映射 ($|k|\le 1$) 的转数区间是一个点 $\rho(f_-)=\rho(f_+)$. 转数为 p/q 的阿诺尔德舌头中转数 $\rho(f,x)$ 与 x 无关的区域, 即 $\rho(f_-)=\rho(f_+)=\rho(f)$ 的区域, 称为 **锁频区**.

所有不同转数的阿诺尔德舌头都有相似的结构. 图 4-1 给出了周期 3 以下的阿诺尔德舌头中的稳定区. 对 0/1 与 1/1 轨道, 还给出了其倍周期轨道的稳定区. 图 4-1 表明了圆映射两种对称性. 由 (1.6) 式, 很容易证明

$$\rho(\omega+n,k)=\rho(\omega,k)+n, \tag{4.11}$$

其中 n 是整数. (4.11) 表明 (ω,k) 平面的结构具有周期性, 这个性质是所有圆映射都具有的. 另一性质是下述的反射对称性. 据 (1.6), 有

$$\begin{aligned}
&f^{(q)}(\theta,1-\omega)=q+f^{(q)}(\theta,-\omega)=q-f^{(q)}(-\theta,\omega),\\
\therefore\quad &(f^{(q)}(-\theta_0,1-\omega)+\theta_0)/q=1-(f^{(q)}(\theta_0,\omega)-\theta_0)/q,
\end{aligned}$$

即

$$\rho(1-\omega,k)=1-\rho(\omega,k). \tag{4.12}$$

它也是法里树的对称性. 图 4-2 给出了阿诺尔德舌头 A 、锁频区 L 与稳定区 S 之间的关系.

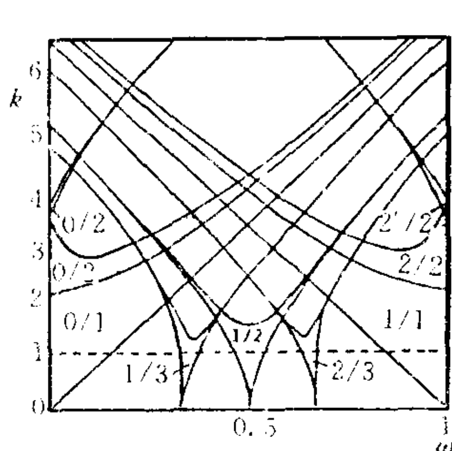


图 4-1

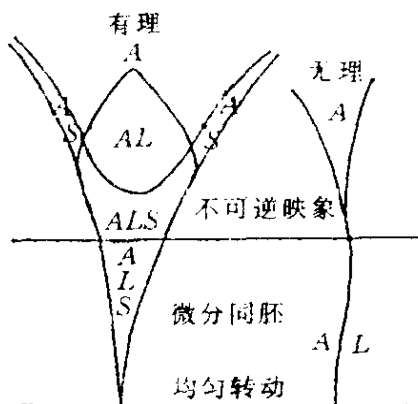


图 4-2

特别值得注意的是，在 $k=0$ 时，ω 轴上有理转数的测度即实轴上有理数的测度，因此为 0. 而在 $k=1$ 时，$f_{\omega,k}(x)$ 在临界点处有三次拐点，有大的 $f'_{\omega,k}(x)\approx 0$ 的邻域，使有理数转数区间 $\Delta\omega(p/q)$ 的总测度 $\sum\Delta\omega(p/q)=1$，无理数转数的测度则为 0. 在 $k=1/2$ 时，有理数转数与无理数转数的测度几乎相等. 在图 4-2 中也给出了与无理数转数相应的阿诺尔德舌头. 无理数转数的阿诺尔德舌头可视为有理数转数的阿诺尔德舌头的长周期极限，它的稳定区与锁频区都趋向宽度为 0 的线段. 因此 $k>1$ 时无理数阿诺尔德舌头中最先出现混沌运动，$k=1$ 是准周期向混沌转变的临界点.

§5 转数区间、阿诺尔德舌头、双稳和拓扑混沌

§4 在定义转数区间时，引入非减圆映射 $f_+(x)$ 与 $f_-(x)$，如图 5-1 所示. 为了对转数区间进行深入研究，我们定义一般的非减圆映射 $f_\mu(x)$，它在 x_{1_μ} 与 x_{2_μ} 之间是一平台，在 $[x_{1_\mu},x_{2_\mu}]$

之外与 $f(x)$ 相同. $x_{1_\mu}\in[0,m_1]$, $x_{2_\mu}\in[m_2,1]$, 由下面的方程式确定:

$$f(x_{1_\mu})=f(x_{2_\mu})=f(m_2)+\mu(f(m_1)-f(m_2)),\qquad(5.1)$$

其中 $\mu\in[0,1]$. 显然有 $f_1(x)=f_+(x)$, $f_0(x)=f_-(x)$. 非减圆映射有唯一的转数. 对 $f_\mu(x)$ 的研究可加深我们对 $f(x)$ 轨道的认识.

存在唯一平台区的非减圆映射 $h(x)$, 具有下述性质 [10]: 如果其转数为有理数 p/q, 则有一 p/q 轨道其轨道点不落在平台区; 如果其转数为无理数, 则由平台区出发的轨道不再可能经过平台区. 这个性质可以用反证法来证明. 记 $I=[x_1,x_2]$ 为平台区, $I_{-i}=h^{-i}(I)$ 为区间 I 的 i 次逆映象. 如果有 p/q 轨道与 I 不相交, 则定理不需证明, 因此设

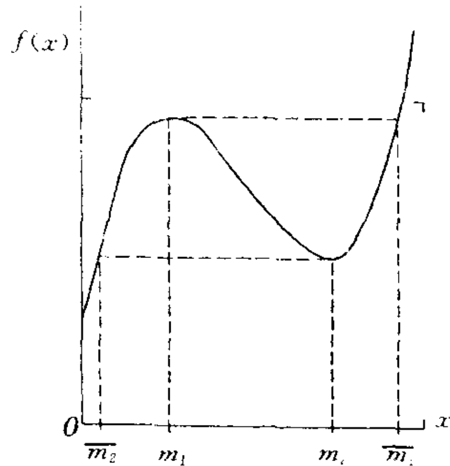


图 5-1

$h^{(q)}(I)\in I$. 易见 $I,I_{-1},\cdots,I_{-(q-1)}$ 两两互不相交, 因为如果 $I_{-i}\cap I_{-j}\neq\emptyset$ 且 $j>i$, 则有周期为 $j-i$ 的周期轨道, $j-i<q$, 与假设矛盾. 因此轨道点 $h^{(q)}(I_{-i})\in I_{-i}$. 设 I_{-j} 为 I 右边紧邻 I 的区间, 因为 h 是连续非减的, 必有

$$h^q([x_2,h^{-j}(x_1)])\supseteq[x_2,h^{-j}(x_1)],\qquad(5.2)$$

所以在 $[x_2,h^{-j}(x_1)]$ 内有 p/q 周期轨道. 对于无理数转数, 如由平台出发的轨道又回到平台, 必是有理数轨道, 因此是不可能的.

$f(x)$ 的转数与 $f_\mu(x)$ 的转数的关系是： $\rho(f_0) = \rho_-(f)$, $\rho(f_1) = \rho_+(f)$; 对每一个 $p/q \in \rho(f)$ 必有 $\mu \in [0,1]$ 使 $\rho(f_\mu) = p/q$. 相应地，如果 $p/q \in \rho(f)$, 则 f 必有与区间 (m_1, m_2) 不相交的 p/q 周期轨道；如有无理数 $\alpha \in \rho(f)$, 则 f 也必有与区间 (m_1, m_2) 不相交的转数为 α 的轨道. 如 $\rho_\pm(f) = \alpha$, 则必定有由 m_1 或 m_2 点出发且与区间 (m_1, m_2) 不相交的轨道. 由此可见，转数区间内的轨道都是允许的，当然，它们之中大部分都是不稳定的. 转数区间内的轨道最多只有两条是稳定的，它们对应于以 $f(x)$ 的两个极值点为初值达到的极限轨道.

图 5-2 给出转数为 p/q- 阿诺尔德的舌头中锁频区与 $g(x) = f^{(q)}(x) - p$ 的极值位置的关系. 当 $g(x)$ 的两个极值都在由 $g(x)$ 的两个不稳定不动点确定的方框之内时，f 是锁频的，$\rho(f)$ 是一个点. 锁频区的边界决定于 m_1 或 m_2 的映象为不稳定不动点. 在 $M^\pm$ 区，由极大 (小) 点 $m_1(m_2)$ 的邻域出发的轨道仍被限制在方框内，具有转数 p/q, $g(x)$ 的分岔行为与单峰映射的分岔行为相同，也可能有混沌轨道，其转数也是 p/q. 对于无理数转数的阿诺尔德舌头， $M^\pm$ 区的宽度趋向 0. 转数较大的阿诺尔德舌头的 M^+ 分支可与转数较小的任一阿诺尔德舌头的 M^-

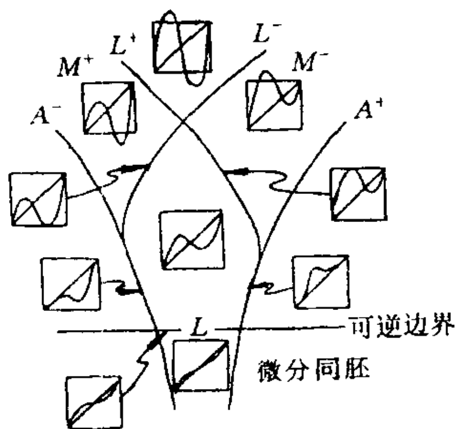


图 5-2

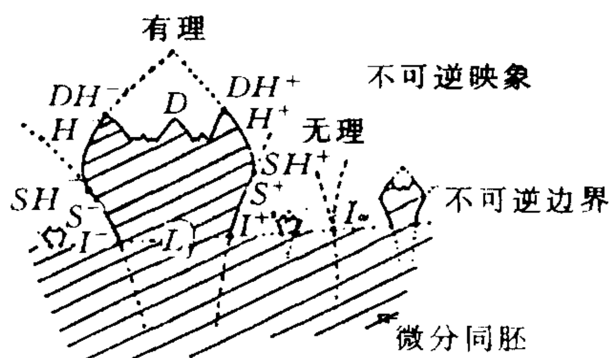


图 5-3

分支相交. 相交处的 f 具有相应的两个阿诺尔德舌头的 $M^-(M^-)$ 与 $M^+(M^+)$ 双稳态.

对于正弦圆映射，在锁频区内，$g(x)$ 的倍周期分岔是完全的，其分岔行为与立方映射相同. 倍周期分岔区的拓扑熵为 0, 因此关于拓扑混沌有下述定理[11]: 非减连续圆映射的拓扑熵为 0; 具有非平庸 (即不缩成一点的) 转数区间的连续圆映射具有正的拓扑熵; 对于锁频连续圆映射，如果只有 $q\cdot 2^n$ 形式的周期轨道，其拓扑熵为 0; 如果周期轨道非 $q\cdot 2^n$ 形式，则拓扑熵大于 0; 具有无理数转数的锁频非单调连续圆映射的拓扑熵为 0. 根据这条定理，可以得到如图 5-3 中黑线与点所示的拓扑混沌边界. D 是倍周期 $q\cdot 2^n$ 锁频区的边界，在它之下只有 $q\cdot 2^n$ 周期轨道，而无其他形式的周期轨道. 图中阴影区的拓扑熵为 0.

第 2 章

圆映射的符号动力学

§6 周期轨道的符号表示

我们知道，根据符号动力学，可以利用少数几个符号来表示轨道的拓扑性质，符号与轨道之间有一一的对应关系，从而对系统的轨道作出完全而且系统的描述. 关于圆映射的符号动力学，在本丛书的《实用符号动力学》[12] 一书中已有详细的论述. 本章将从另一角度，即用圆映射的提升形式 (1.2)，而非 (1.4)，来给出主要轨道的符号表示 [1],[13]. 这样作的好处是更为直观，并省略了 k 值大时映射分段的麻烦. 我们将只着重于讨论稳定轨道，它们可以用超稳定轨道的符号表示.

圆映射 (1.6) 在 $n+\dfrac{1}{2\pi}\arccos\dfrac{1}{k}<x<n+1-\dfrac{1}{2\pi}\arccos\dfrac{1}{k}$ 内有正的斜率，落在这种区间内的轨道点以 P 表之；在 $n-1-\dfrac{1}{2\pi}\arccos\dfrac{1}{k}<x<n+\dfrac{1}{2\pi}\arccos\dfrac{1}{k}$ 内 f 有负的斜率，相应的轨道点以 N 表之. 当 $|k|<1$ 时，只有 P 符号的轨道点. 当 $k>1$ 时，稳定周期轨道必通过临界点的邻域，所有稳定轨道都可以按通过临界点的超稳定轨道来分类. 因此我们规定轨道由极小值 m_0 或极大值 M_0 出发. 一条转数为 p/q 的周期轨道可表示

为

$$W_m = \sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\cdots\sigma_{n_{q-1}}m_p \quad \text{或} \quad W_M = \sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\cdots\sigma_{n_{q-1}}M_p, \tag{6.1}$$

其中 $m_p(M_p)$ 表示 $m_0(M_0)$ 之后的第 p 个极小值 (极大值); 下标 n_i 表示 $m_0(M_0)$ 之后第 n_i 个谷 (峰) 的位置, 即 n_i 谷 (峰) 两边的 P, N 分别记为 P_{n_i}, N_{n_i}.

参数空间中相结构的周期性 (4.11) 可表示为

$$\sigma_{n_1+1}\sigma_{n_2+2}\cdots\sigma_{n_{q-1}+q-1}m_{p+q} \approx \sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\cdots\sigma_{n_{q-1}}m_p, \tag{6.2}$$

或

$$\sigma_{n_1+1}\sigma_{n_2+2}\cdots\sigma_{n_{q-1}+q-1}m_{p+q} \approx \sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\cdots\sigma_{n_{q-1}}M_p. \tag{6.3}$$

反射对称性 (4.12) 可表示为

$$\begin{aligned}\sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\cdots\sigma_{n_{q-1}}m_p &\approx \sigma_{-n_1}\sigma_{-n_2}\cdots\sigma_{-n_{q-1}}M_{-p}\\ &\approx \sigma_{1-n_1}\sigma_{2-n_2}\cdots\sigma_{q-1-n_{q-1}}M_{q-p}.\end{aligned} \tag{6.4}$$

利用性质 (6.2) 式、 (6.3) 式与 (6.4) 式, 可以只研究 $\omega(0,1)$ 区间内经过 $f(\theta)$ 极小点 (或极大点) 的轨道, 其他超稳定轨道可以通过等价关系得到.

当 ω 给定时, 随着 k 值的增加, $f(\theta)$ 曲线的极小值降低, 任一通过极小点的周期轨道, 为了保持其模式 (6.1), 要通过增加 ω 来提高极小值. 因此, 在 (ω, k) 面上, 经过极小点的超稳定轨道曲线有正的斜率. 反之, 经过极大点的超稳定轨道有负的斜率. 根据这个性质, 我们以在 ω 轴上的顺序规定轨道的顺序. 对于通过极大点的轨道, ω 轴上的顺序与 k 轴上的顺序一致, 对于经过极小点的轨道, 这两者相反.

对于通过 $m_0(M_0)$ 的轨道，规定

$$P_n(N_n) > N_n(P_n). \tag{6.5}$$

字母 N 具有负宇称，一个字如果含有奇数个 N, 则称该字有奇宇称，否则称其有偶宇称. 两条轨道

$$W_m = \sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\cdots\sigma_{n_{q-1}}m_p \quad 或 \quad W'_m = \sigma'_{n'_1}\sigma'_{n'_2}\cdots\sigma'_{n'_{q-1}}m_{p'} \tag{6.6}$$

如果其前 i 个符号 $(i \le q-1, q'-1)$ 完全相同，则规定

如 $\sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\cdots\sigma_{n_i}$ 为偶且 $n_{i+1} > n'_{i+1}$ $(n_{i+1} < n'_{i+1})$ 或 $n_{i+1} = n'_{i+1}$ 而 $\sigma_{n_{i+1}} = N_{n_{i+1}}$, $\sigma'_{n_{i+1}} = P_{n_{i+1}}$, 则

$$W > W' \qquad (W < W'); \tag{6.7a}$$

如 $\sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\cdots\sigma_{n_i}$ 为奇且 $n_{i+1} > n'_{i+1}(n_{i+1} < n'_{i+1})$ 或 $n_{i+1} = n'_{i+1}$ 而 $\sigma_{n_{i+1}} = P_{n_{i+}}$, $\sigma'_{n_{i+1}} = N_{n_{i+1}}$, 则

$$W < W' \qquad (W > W'). \tag{6.7b}$$

这种比较只当两条轨道都是由 $m_0(M_0)$ 出发时才有意义. 由 m_0 出发与由 M_0 出发的轨道之间不好比较，它们的相互顺序与 k 值有关.

定义移位算符

$$S\sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\cdots\sigma_{n_{q-1}}m_p = \sigma_{n_2}\cdots\sigma_{n_{q-1}}m_p, \tag{6.8}$$

则超稳定轨道的允字条件可表示为

$$\begin{aligned} S^kW_M &\le W_M, \qquad & k &= 1,2,\cdots,q-1 \\ S^kW_m &\le W_m, \qquad & k &= 1,2,\cdots,q-1 \end{aligned} \tag{6.9}$$

满足允字条件的字都对应一条存在的超稳定轨道，其在参数平面上出现的顺序由 (6.7) 式确定.

§7 法里序列的符号动力学

圆映射稳定周期轨道中有基本意义的是法里序列. 法里序列的一个元素对应一个阿诺尔德舌头. 当参数 k 值增大时，阿诺尔德舌头的结构越来越复杂，但其与法里序列对应的超稳定轨道的模式，即符号表示，却保持不变. 也就是说法里序列保持线性映象的符号表示，这时映象退化为只有 P 符号，无 N 符号. 以转数为 3/8 的轨道为例，在线性情况，设初始点的位置为 0, 去掉与初始点 (或末点) 对应的 $m_p(M_p)$ 点，其余 7 个点的坐标可表示为

$$\frac{3}{8},\frac{6}{8},\frac{9}{8},\frac{12}{8},\frac{15}{8},\frac{18}{8},\frac{21}{8}, \tag{7.1}$$

用符号表示为

$$P_0,P_0,P_1,P_1,P_1,P_2,P_2, \tag{7.2}$$

为方便起见，以 Δ 表示其以后符号的下标要加 1, 则 (6.2) 可改变为

$$P^2\Delta P^3\Delta P^2. \tag{7.3}$$

在非提升形式的圆映射中，Δ 等价于 (mod 1) 运算. 在 (6.3) 表示中，对于转数为 p/q 的轨道含有 $q-1$ 个 P 字母与 $p-1$ 个 Δ 字母. 以后将可看到，当 k 不为 0 甚至大于 1 时，(6.3) 模式保持不变，只有与 (7.3) 中没有标出的那个符号对应的点可能处于 P 或 N(对于非超稳定轨道) 或临界点 (对于超稳定轨道) 上.

根据 (7.1)~(7.3)，可写出法里树上任一转数对应的符号表示．不过，对于法里和 $\oplus$ 运算，我们有如下的符号规则：如法里树上两相邻转数为 p_1/q_1 与 p_2/q_2, $0 < p_1/q_1 < p_2/q_2 < 1$, 相应字为 W_1 与 W_2, 则其间存在转数为 $(p_1+p_2)/(q_1+q_2)$ 的唯一字 W^* 为

$$W^* = W_1 \Delta P W_2 = W_2 P \Delta W_1. \tag{7.4}$$

为了应用这一规则，还必须给出边界字．即对应转数为 $1/n$ 与 $(n-1)/n$ 的轨道的符号表示．不难看出，它们是

$$P^{n-1} \quad 与 \quad P(\Delta P)^{n-2}. \tag{7.5}$$

表 7.1 给出了按 (7.4) 与 (7.5) 算得的法里树中前 n 级轨道的符号表示．由于字中字母的对称性，(7.4) 中两种组合的结果是相同的．

表 7.1

转数	简化表示	一般表示	
1/5	P^4	$P_0^4 m_1$	与 $P_1^4 M_1$
1/4	P^3	$P_0^3 m_1$	与 $P_1^3 M_1$
2/7	$P^3\Delta P^3$	$P_0^3 P_1^3 m$	与 $P_1^3 P_2^3 M_2$
1/3	P^2	$P_0^2 m_1$	与 $P_1^2 M_1$
3/8	$P^2\Delta P^3\Delta P^2$	$P_0^2 P_1^3 P_2^2 m_3$	与 $P_1^2 P_2^3 P_3^2 M_3$
2/5	$P^2\Delta P^2$	$P_0^2 P_1^2 m_2$	与 $P_1^2 P_2^2 M_2$
3/7	$P^2\Delta P^2\Delta P^2$	$P_0^2 P_1^2 P_2^2 m_3$	与 $P_1^2 P_2^2 P_3^2 M_3$
1/2	P	$P_0 m_1$	与 $P_1 M_1$
4/7	$P\Delta P^2\Delta P^2\Delta P$	$P_0 P_1^2 P_2^2 P_3 m_4$	与 $P_1 P_2^2 P_3^2 P_4 M_4$
3/5	$P\Delta P^2\Delta P$	$P_0 P_1 P_2 m_3$	与 $P_1 P_2^2 P_3 P_3 M_3$
5/8	$P\Delta P^2\Delta P\Delta P^2\Delta P$	$P_0 P_1^2 P_2 P_3^2 P_4 m_5$	与 $P_1 P_2^2 P_3 P_4^2 P_5 M_5$
2/3	$P\Delta P$	$P_0 P_1 m_2$	与 $P_1 P_2 M_2$
5/7	$P\Delta P\Delta P^2\Delta P\Delta P$	$P_0 P_1 P_2^2 P_3 P_4 m_5$	与 $P_1 P_2 P_3^2 P_4 P_5 M_5$
3/4	$P\Delta P\Delta P$	$P_0 P_1 P_2 m_3$	与 $P_1 P_2 P_3 M_3$
4/5	$P(\Delta P)^3$	$P_0 P_1 P_2 P_3 m_4$	与 $P_1 P_2 P_3 P_4 M_4$

现在证明规则 (7.4) 式. 设在 k 值处 W_1 与 W_2 的超稳定轨道分别位于 ω_1 与 ω_2, 即

$$f_{\omega_1,k}^{(q_1)}(x_0)=x_0+p_1,\quad f_{\omega_2,k}^{(q_2)}(x_0)=x_0+p_2. \tag{7.6}$$

其中 x_0 为 m_0 或 M_0, 下面设它为 m_0. 考虑作为 ω 函数的

$$f_{\omega,k}^{(q_1)}(x_0)\quad 与\quad f_{\omega,k}^{(-q_2)}(x_0+p_1+p_2)|_{W_2}, \tag{7.7}$$

其中 $f^{(-q_2)}|_{W_2}$ 是按 W_2 的逆轨道定义的反函数. 因为 W_1 与 W_2 的 q_1-1 与 q_2-1 个字母都是 P, 所以 $f^{(q_1)}$ 是 ω 的增函数, $f^{(-q_2)}|_{W_2}$ 为 ω 的减函数. 当 ω 由 ω_1 增至 ω_2 时, $f_{\omega,k}^{(q_1)}(x_0)$ 由 x_0+p_1 往大处增加, 而 $f_{\omega,k}^{(-q_2)}(x_0+p_1+p_2)|_{W_2}$ 由较大的值降至 x_0+p_1, 因此在 ω_1 与 ω_2 之间必有 ω^*, 使

$$f_{\omega^*,k}^{(q_1)}(x_0)=f_{\omega^*,k}^{(-q_2)}(x_0+p_1+p_2)|_{W_2}. \tag{7.8}$$

如作 $f(\theta)$ 图, 可知 $f_{\omega_1,k}^{(-q_2+1)}(x_0+p_1+p_2)|_{W_2}<f_{\omega_1,k}(x_0+p_1+1)$. 否则, 在 (ω_1,ω_2) 内将存在 $(p_2-1)/(q_2-1)$ 的超稳定轨道. 这些轨道的字都由 P 与 Δ 组成, 转数是 ω 的单调增函数, $(p_2-1)/(q_2-1)$ 不可能在 (ω_1,ω_2) 内. 因此有

$$x_0+p_1<f_{\omega^*,k}^{(q_1)}(x_0)=f_{(\omega^*,k)}^{(-q_2)}(x_0+p_1+p_2)|_{W_2}<p_1+1-x_0, \tag{7.9}$$

即 $f_{\omega^*,k}^{(q_1)}(x_0)$ 位于 p_1 谷的 P 分支上, 合成轨道的符号为 $W_1\Delta PW_2$. 相似地, 讨论 $f_{\omega,k}^{(q_2)}(x_0)$ 与 $f_{\omega,k}^{(-q_1)}(x_0+p_1+p_2)|_{W_1}$, 可以得到 $W^*=W_2P\Delta W_1$.

由等式 (7.4) 还可以看到, W_1 与 W_2 中周期短的一个必为周期长的那一个的一部分, 而且所有字都对其自身有反演对称性. 表 7.1 的例子表明了法里轨道的这种性质.

把本节的符号与 §3 的符号作比较，有对应关系

$$P \longleftrightarrow \mathrm{L}, \quad \Delta\mathrm{P} \longleftrightarrow \mathrm{R}. \tag{7.10}$$

因此，如把转数为 1/2 的轨道 LR 表为 $P\Delta P$, 并定义法里变换(这里采用的符号顺序与 §3 相反)

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_0 : P \to P,\ \Delta P \to P\Delta P, \\ &\mathcal{F}_1 : \Delta P \to \Delta P,\ P \to P\Delta P, \end{aligned} \tag{7.11}$$

则法里地址为 $\langle I_0, I_1, \cdots, I_N \rangle$ 的轨道的 P, Δ 符号表示由下式给出

$$\mathcal{F}_{I_0}\mathcal{F}_{I_1}\cdots\mathcal{F}_{I_N}(P\Delta P). \tag{7.12}$$

把如此得到字的最后的 ΔP 去掉，即得与 (7.4) 给出的一致的结果. 应该注意到，上述最后一个 ΔP 对应稳定轨道中最接近临界点的那个点，它可能位于 P 或 N, 在 $k > 1$ 时仍写作 ΔP 是无意义的. 此外，当我们把图 3-4 的符号与表 7.1 的符号作对比时，在作替换 (7.10) 后，应把由表 7.1 得到的序列按轮换操作对称化，并去掉首或尾的 ΔP, 这个 ΔP 的位置就是极值点的位置.

§8 新生轨道与拓扑度定理

随着 k 值的增加，(ω, k) 平面上阿诺尔德舌头内具有不同字的轨道数目越来越多，其拓扑结构对不同的阿诺尔德舌头并不一定都具有普适性，因此本节将首先讨论新生轨道的一般规则.

首先证明：转数为 p/q 的超稳定轨道随 k 值的增加总是成对地出现的，它们形成右倾的 (对 m_0) 或左倾的 (对 M_0) U 形曲线. 这个问题可归结于研究方程

$$g(\omega,k) \equiv f_{\omega,k}^{(q)}(x_m) - x_m - p = 0 \tag{8.1}$$

的解，其中 $x_m = \pm\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{1}{k}$. 在下面的讨论中，我们把 ω 作为变量，把 k 作为参数. 我们要证明：随着 k 值的增加，$g(\omega,k)=0$ 的新解成对地出现. 容易看出，$g(\omega,k)$ 是 ω 与 k 的单值连续函数，且随 $\omega \to \pm\infty$ 有 $g(\omega,k)\to\pm\infty$. 所以在 ω 轴的一个充分大的有限区间内 g 与 ω 轴有奇数个交点. 又因 $g(\omega,k)$ 随 k 连续地变化，新交点总是成对地出现的，它对应于 $g(\omega,k)$ 曲线的一个峰或谷穿过 ω 轴. 这一对解的 sign (g'_ω) 分别为 +1 与 −1. 在 (8.1) 的解中，有一个对应于原始的法里序列的元素，它的 sign $(g'_\omega)=+1$. 因此对 (8.1) 的所有解 ω_i, 拓扑度 $\sum\limits_i \operatorname{sign}(g'_\omega)|_{\omega=\omega_i}=+1$ 对 k 保持不变.

$g(\omega,k)$ 作为 ω 的函数出现峰值是与 $f_{m,k}^{(q)}(x)$ 作为 x 的函数出现峰值相联系的. 因此，随着 k 的变化，在某一 k 值处通过 $m(M)$ 的轨道也将经过 $M(m)$, (ω,k) 平面上由 m_0 出发的一对 p/q 轨道 (U 形) 也将与由 M_0 出发的一对同样 p/q 的轨道 (U 形) 相交. 在随 k 值的增加而出现的这两条 U 形曲线的第一个交点处，由 m_0 出发的与由 M_0 出发的超稳定轨道是同一条轨道. 由这一交点出发，我们有四条超稳定轨道，两条对应 m_0, 另两条对应 M_0. 这四条轨道具有既不相同又相互有关的符号. 文献 [12] 将这个交点称为关节点.

相应于 U 形曲线的两支，其符号字中只有一个字母不同. 对于通过 m_0 的超稳定轨道，这个字母对应于 $f(x)$ 峰两边的两

支，因此，如一支为 $P_n(N_n)$ 则另一支必为 $N_{n+1}(P_{n-1})$. 对于通过 M_0 的超稳定轨道，这个字母对应于 $f(x)$ 谷两边的两支，如一支为 $P_n(N_n)$ 则另一支必为 $N_{n+1}(P_{n+1})$. 这两对轨道中，一对字母不同处的位置相应于另一对轨道的起点. 除这两对字母外，四个字中的其他字母在作由 m_0 与 M_0 出发引起的符号不同而来的变换后是完全相同的.

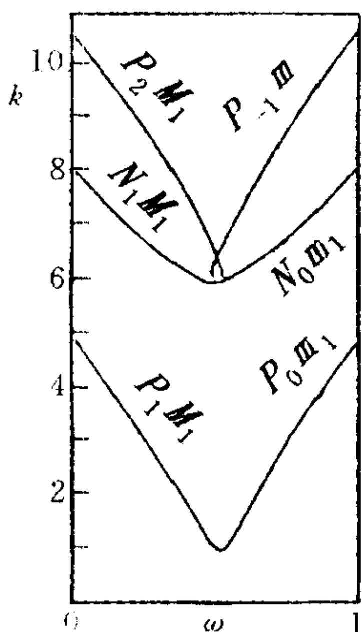


图 8-1

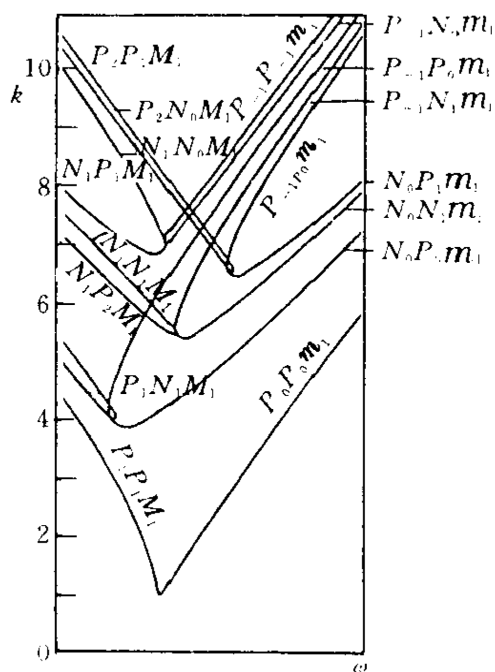


图 8-2

作为例子，图 8-1 与图 8-2 分别给出了 (ω, k) 平面上转数为 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{1}{3}$ 的超稳定轨道. 计算发现，而且也容易证明，在 $k = 2n\pi$ 处有

$$P_{-n}m_1, N_{-n+1}m_1, P_{-n+1}m_1, \cdots, P_{-1}m_1, N_0m_1, P_0m_1 \qquad (8.2)$$

共 $2n+1$ 条 $\frac{1}{2}$ 轨道. 这表明 2 周期轨道近似地以 $\Delta k = 2\pi$ 为周期产生新的轨道. $\frac{0}{2}$ 轨道 $\left(\frac{0}{1}\text{ 的倍周期轨道}\right)$ 也有类似的情况. 新生轨道的数目随 k 与周期长度 q 迅速增加. 例如 $\frac{1}{3}$ 轨道

的数目随 k 变化为

k	π	2π	3π	4π	5π
轨道数	1	5	11	21	31

又如在 $k=2\pi$ 处有 3 条 $\frac{1}{2}$ 轨道，5 条 $\frac{1}{3}$ 轨道，15 条 $\frac{1}{4}$ 轨道，51 条 $\frac{2}{5}$ 轨道，…… 此外，这些结构对不同的阿诺尔德舌头无普适性．如果必要，很容易用计算机来生成它们，这里不再进一步讨论．

§9　法里序列与 M.S.S. 序列的 * 积及二元树

研究由映射

$$F_{p/q}(x,\omega,k)\equiv f_{\omega,k}^{(q)}(x)-p \tag{9.1}$$

确定的轨道，其不动点 $F_{p/q}(x,\omega,k)=x$ 即转数为 p/q 的轨道．随 k 的增大，当不动点处的 $\left|\frac{dF_{p/q}}{dx}\right|>1$ 时，p/q 舌头中原始的法里序列轨道失稳，发生分岔．当 $k>1$ 时，$F_{p/q}$ 不动点邻域的一个区域内，$F_{p/q}(x,\omega,k)$ 可以看作 S 单峰映射，它把这个区间映射于其自身．对这个 S 单峰映射，在发生危机前，其周期轨道由 M.S.S 序列描述 [12]．对 $f_{\omega,k}(x)$ 映射来说，这样的轨道由法里序列的字与 M.S.S 序列的字的 * 积来描述．对于超稳定轨道，原来法里序列字中的 m_p(或 M_p)，每经过 $f_{\omega,k}(x)$ 的 q 次迭代，将按 M.S.S 序列的字母进行．因此可如下表述法里序列与 M.S.S 序列的"* 积"．

设 $M=\sigma_1,\sigma_2\cdots\sigma_{n-1}$ 为 M.S.S 序列中的一个字，其中 σ 表示 N 或 P(即单峰映射中的 R 或 L)．如果映射 $F_{p/q}$ 有周期轨道

M, 则对应地 f 有周期轨道 $W*M$, 其中 W 为转数为 p/q 的轨道的符号字 (不含 m_p 或 M_p). 按 $*$ 积的定义,

$$W*M = W(\tau_1)_p W_p(\tau_2)_{2p} W_{2p}(\tau_3)_{3p}\cdots(\tau_{n-1})_{(n-1)p}W_{(n-1)p}, \quad (9.2)$$

其中, 当 W 为偶时 $\tau_i=\sigma_i$, 否则 τ_i 取与 σ_i 相反的符号; $(\tau_i)_{ip}$ 表示 τ_i 在第 ip 个谷 (或峰) 处; W_p 表示 W 中字母的下标都要加 p. 在一固定 ω 处, 随 k 的增大, 按 M.S.S 序列的顺序, 出现 $W*M$ 轨道序列. 对于标准正弦圆映射, 完全的 M.S.S 序列易在阿诺尔德舌头的大 k 值处的稳定区附近出现.

现在, 当我们把 $W*M$ 积与新生轨道的研究结合在一起时, 将会发生复杂的情况. 例如单峰映射中的倍周期序列将会变为复杂的二元树结构. 下面以 0/1 舌头为例, 用上面的符号动力学办法说明为什么会出现这种结构. 按 (8.2) 式的规则, 0/1 的倍周期轨道为 N_0m_0, 对应 M.S.S 序列的 R. 按拓扑度定理, 与 N_0m_0 一起将同时出现 $P_{-1}m_0$, 它不属于原法里序列按 (8.2) 式构造的序列. 据 (9.2) 式, 与 N_0m_0 相应的 4 周期轨道为 $N_0P_0N_0m_0$, 与 P_1m_0 相应的 4 周期轨道为 $P_{-1}N_0P_{-1}m_0$. $N_0P_0N_0m_0$ 与 $P_{-1}N_0P_{-1}m_0$ 有三个不同的字母, 它们不是同时产生的. 图 9-1 给出了 (ω,k) 平面上 $\omega\in(0,1)$, $k\leq 9$(只给出 $k\leq 5$ 的符号表示) 的所有超稳定 1 、 2 、 4 周期轨道. 由图可见, 与 $N_0P_0N_0m_0$ 同时产生的是 $P_{-1}P_0N_0m_0$. 与它们有共一关节点且同时产生的轨道是通过极大点的 $P_1N_0P_1M_0$ 与 $P_1N_0N_0M_0$. 利用对称关系 (6.4) 式, 可知有与它们相应的通过极小点的 $P_{-1}N_0P_{-1}m_0$ 与 $P_{-1}N_0N_0m_0$. 由此可知, 伴随着倍周期的四周期轨道 $N_0P_0N_0$ 与 $P_{-1}N_0P_{-1}$, 必定产生另外两条四周期轨道 $P_{-1}P_0N_0$ 与 $P_{-1}N_0N_0$. 这四条四周期各有其倍周期的 8

周期轨道，每一条轨道又伴随有另一条 8 周期轨道，因此有 8 条 8 周期轨道. 按此类推，将有 2^n 条 2^n 周期轨道. 通过极小点的 2^n 条轨道与通过极大点的 2^n 条轨道形成交叉结构，2^n 个关节点是双超稳定点. 由二周期双超稳定点到四周期双超稳定点作连线，再由四周期双超稳定点到相应的 8 周期双超稳定点作连线，如此等等，我们得到一株二元树. $n \to \infty$ 时树的端点可称为三临界点. 这些三临界点形成康托集合，它们是倍周期 $n \to \infty$ 时临界线的端点.

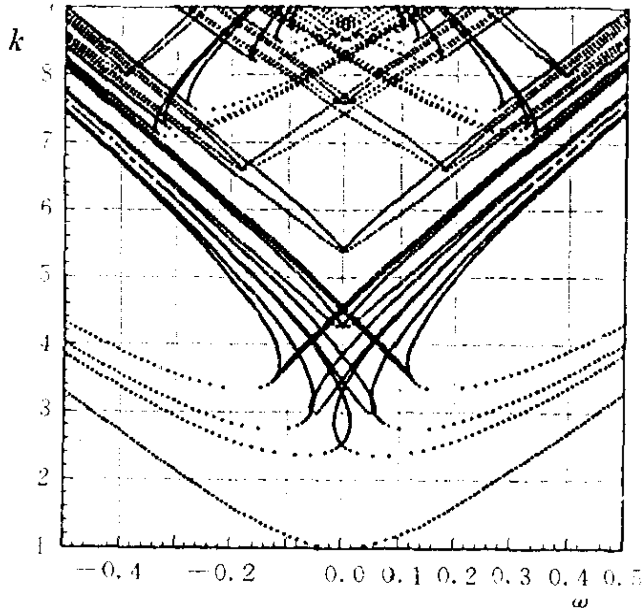


图 9-1

现在，我们可以把 (7.1) 的法里变换推广到符号字中包含有 N 与 $\varDelta N$ 的情况. 这里 $\varDelta$ 仍表示 $\varDelta$ 之后的字的足标是其前一个字的足标加 1. 显然，与转数的法里变换 (3.14) 对应的符号的法里变换 (7.11) 的推广应是

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_1 \quad \varDelta P \to \varDelta P,\ P \to P\varDelta P,\ \varDelta N \to \varDelta N,\ N \to N\varDelta P,\\
&\mathcal{F}_0 \quad \varDelta P \to P\varDelta P,\ P \to P,\ \varDelta N \to P\varDelta N,\ N \to N.
\end{aligned} \tag{9.3}$$

这个变换保持字的奇偶性，并且是保序的，即如 $W_1 > W_2$ 则 $\mathcal{F}(W_1) > \mathcal{F}(W_2)$. 利用 $\mathcal{F}_1$，可由 0/1 轨道 P 得到 $P\varDelta P$ 即 1/2 轨道，以后可由法里树上的法里变换得到所有法里轨道. 相应地，由上述变换也可得到任一阿诺尔德舌头中的倍周期序列及其二元树结构. 对于高周期舌头，其倍周期的数目比 0/1 舌头

多得多，但由 0/1 舌头的轨道经法里变换得到的轨道对各阿诺尔德舌头具有普适性，因此二元树结构是阿诺尔德舌头中的一种普适性结构.

第 3 章

由准周期向混沌过渡的标度律

标准正弦圆映射 (1.6) 在 $k = 1$ 时 $f'(0) = 0$, 出现三次拐点, $k > 1$ 时映射不可逆, $k = 1$ 是由准周期向混沌过渡的临界点, 在 (ω, k) 平面上是临界线. 临界点或临界线处的标度律具有普适性, 本章的目的就是研究这些标度律, 它适用于具有三次拐点的临界圆映射. 这些标度律与转数有关, 只有少数几个无理数转数被详细研究过, 其中最典型的是黄金分割数. 所提出的方法可推广应用于任意二次无理数. 这里只介绍黄金分割数的结果. 关于任意无理数的标度律, 有过两种不同的研究. 一种是关于任意无理数的随机重正化方法 [1],[15], 因此其标度律只具有统计意义. 另一种是关于所有无理数的法里重正化群方法 [8], 由于数学上的困难, 尚无完全的结果. 后一种方法能给出临界线上关于转数的普适的魔梯结构, 我们将在研究魔梯结构后介绍它.

§10 标度行为的数值研究

黄金分割数 $\bar{\rho} = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0.618033985\cdots$ 有最简单的连

分数表示式

$$\bar{\rho}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}=[1,1,1,\cdots]. \tag{10.1}$$

把连分数切断，可得一数列

$$\rho_1=[1]=1/1,\quad \rho_2=[1,1]=1/2,\quad \rho_3=[1,1,1]=2/3,\cdots$$

$$\rho_i=[1,1,1,\cdots,1]=F_i/F_{i+1}. \tag{10.2}$$

$\{F_i\}$ 为菲波那契数列，可由递推关系确定:

$$F_0=0,\ F_1=1,\ F_{i+2}=F_i+F_{i+1}. \tag{10.3}$$

在下述意义上，我们说黄金分割数是最无理的数：在所有无理数中，黄金分割数的有理逼近 (10.2) 是最慢的. 因此，在临界线上，这些有理逼近对应的转数具有最大的区间和，与它有关的标度律在临界线上及其邻域的度量性质上起主要作用. 在 (ω,k) 平面上，转数为给定无理数的运动只在一条线上发生，其面测度为 0. 在实际过程中观察到的现象，是由临界指数描述的 $\bar{\rho}$ 邻域的性质，这种性质可用有理数转数序列 ρ_i 来逼近. 下面研究这种逼近办法.

设 f 为具有无理数转数的圆映射，根据 Denjoy 定理，存在 $\varphi(x)$ 使

$$\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi=R, \tag{10.4}$$

式中 $\varphi(x)$ 具有性质

$$\varphi(0)=0,\quad \varphi(x+1)=\varphi(x)+1; \tag{10.5}$$

R 为简单转动，

$$R(x) = x + \bar{\rho}, \tag{10.6}$$

在 $k < 1$ 时，$\varphi(x)$ 是解析函数．记

$$u(x) = \varphi(x) - x, \tag{10.7}$$

由 (10.5) 可见 $u(x)$ 是 x 的解析函数．对有理数转数，不存在解析函数 φ 使 (10.4) 成立，但可在离散点

$$x_j = jF_i/F_{i+1} \qquad\qquad j = 0, 1, \cdots, F_{i+1} \tag{10.8}$$

上构造 $\varphi^i(x_j)$, 使

$$\varphi^{\,i}(x_{j+1}) = f(\varphi^i(x_j)) \tag{10.9}$$

并且满足

$$\varphi^i(0) = 0, \quad \varphi^i(x_j + 1) = \varphi^i(x_j) + 1. \tag{10.10}$$

也就是说，以 $\varphi^i(0) = 0$ 为初值，用 (10.9) 式进行迭代得到 $\varphi^{\,i}(x_j)$，如果 $\varphi^{\,i}(x_j)$ 不在 (0, 1) 内，可用 (10.10) 第二式把它化成在 (0,1) 内．由于 f 确定了所讨论的周期轨道，这样得到的 $\varphi^{\,i}(x_j)$ 必满足 (10.9) 与 (10.10)．圆映射 (1.6) 在 $k = 1$ 时 $f'(0) = 0$, 超稳定周期轨道必经过这一点，且 $f^{(F_{i+1})}(0) = F_i$. $\varphi^{\,i}(x_j)$ 即转数为 F_i/F_{i+1} 的超稳定轨道上的第 j 个点的坐标．由 $\varphi^{\,i}(x_j)$ 可定义周期量

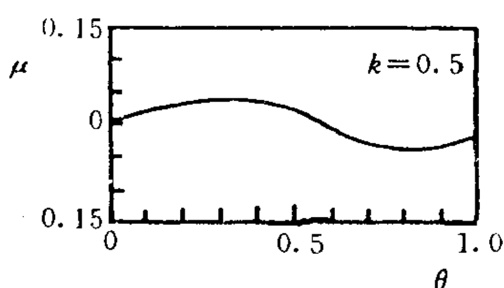
$$u^i(x_j) \equiv \varphi^{\,i}(x_j) - x_j \tag{10.11}$$

及其傅里叶变换

$$A^i(\omega) \equiv \frac{1}{F_{i+1}} \sum_{j=0}^{F_{i+1}-1} u^i(x_j) e^{i2\pi\omega x_j}. \tag{10.12}$$

当 $i \to \infty$ 时，$\varphi^i, u^i, A^i(\omega)$ 趋向与无理数转数相应的连续函数 $\varphi(x)$, $u(x)$ 与 $u(x)$ 的傅里叶变换 $A(\omega)$. 它们实际上就是对周期与准周期轨道的描述.

S.J. Shenker 对黄金分割数情况准周期运动的临界行为作了详细的数值研究[16]. 图 10-1 与图 10-2 给出了对 $i = 17$, $\rho_{17} = 1597/2584$ 所作的数值计算的结果. $k < 1$ 时 $u(x)$ 是光滑的，傅里叶谱随 ω 增大而指数地衰减. $k = 1$ 时 $u(x)$ 仍是连续的，但不再光滑，它具有精细的标度结构. 傅里叶变换 $A(\omega)$ 的峰随 ω 下降 (如同 ω^{-1}), 在菲波那契数 F_i 处有最高的峰，而较低的峰发生在菲波那契数的和与差之处. $u(x)$ 的自相似性反映在 $A(\omega)$ 的两相邻峰之间的主要结构是相同的.



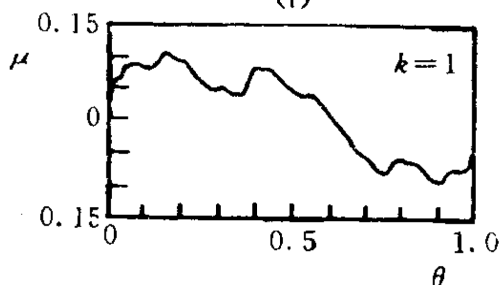


图 10-1 与黄金分割数对应的 KAM 曲线



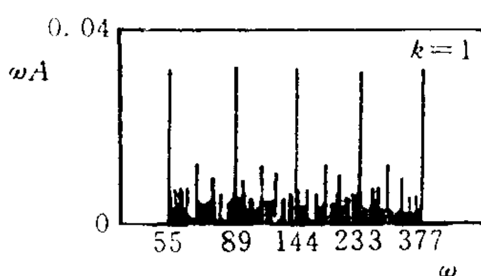


图 10-2 在图 10-1 上运动的谱

在给定 k 值处，$f^{(F_{i+1})}(0;\omega,k) = F_i$ 确定了 $\omega = \omega_i(k)$, 定义 ω 由 ω_i 至 ω_∞ 的收敛率

$$\delta_i(k) = \frac{\omega_{i-1}(k) - \omega_i(k)}{\omega_i(k) - \omega_{i+1}(k)}, \tag{10.13}$$

它给出参数空间的标度性质．计算发现，

$$\lim_{i\to\infty}\delta_i(k)=-\bar{\rho}^{-2},\quad 0\le k<1; \tag{10.14}$$

$$\lim_{i\to\infty}\delta_i(1)=-2.83360\pm0.00003\equiv\delta. \tag{10.15}$$

$0<k<1$ 的 δ 与 $k=0$ 时由简单转动 $R_i(x)=x+\dfrac{F_i}{F_{i+1}}$ 得到的结果相一致，后者可以用菲波那契数得到．记 $k=1$ 时 $\delta=-\bar{\rho}^{-y}$，则 $y=2.16443\pm0.00002$.

关于相空间的标度性，仿照费根鲍姆，对无理转数 $\bar{\rho}$ 的圆映射 $f(x)$, 定义

$$\alpha_i(k)=d_{i-1}/d_i, \tag{10.16}$$

其中

$$d_i=f^{(F_i)}(0)-F_{i-1}. \tag{10.17}$$

计算发现，

$$\lim_{i>\infty}\alpha_i(k)=-\bar{\rho}^{-1},\quad 0\le k<1; \tag{10.18}$$

$$\lim_{i\to\infty}\alpha_i(1)=-1.28857\pm0.00002\equiv\alpha. \tag{10.19}$$

$0\le k<1$ 的 α 与 $k=0$ 时由简单转动 $R_{\bar{\rho}}(x)=x+\bar{\rho}$ 得到的一致．记 $k=1$ 时 $\alpha=-\bar{\rho}^{-x}$, 则 $x=0.52687\pm0.00002$.

除 δ 与 α 外，另一有意义的量是稳定性参数

$$D_i(k)=\frac{d}{dx}f^{(F_{i+1})}(x)|_{x=0}. \tag{10.20}$$

通常采用余数来代替 $D_i(k)$, 它的定义是

$$R_i(k)=\frac{1}{2}(1-D_i(k)). \tag{10.21}$$

当 $0 < R < 1$ 时轨道稳定, $R > 1$ 或 $R < 0$ 时不稳定. $R = 0$ 时发生切分岔, $R = 1$ 时发生倍周期分岔.

现在讨论 $k = 1$ 的邻域性质. 定义 $\varepsilon \equiv 1 - k$. 计算发现, 当 ε 很小而 i 很大时, $R_i(k)$ 、$\alpha_i(k)$ 与 $\delta_i(k)$ 都只是组合变量 εF_{i+1}^z 的函数, 这里 $z = 1.0537 \pm 0.00015$, 是 x 的两倍. 图 10-3 给出了 $R_i(k)$ 、$\alpha_i(k)$ 与 $\delta_i(k)$ 与 εF_{i+1}^z 的标度关系. 对 $F_{i+1} = 6765, 10946$ 与 17711 所得的点都落在同一曲线上. 计算还表明, 在 $k = 1, \omega = \bar{\omega}(1)$ ($\bar{\omega}(1)$ 由 $\rho = \rho(\bar{\omega}, 1) = \bar{\rho}$ 定义) 时, 对于小的 x 值有

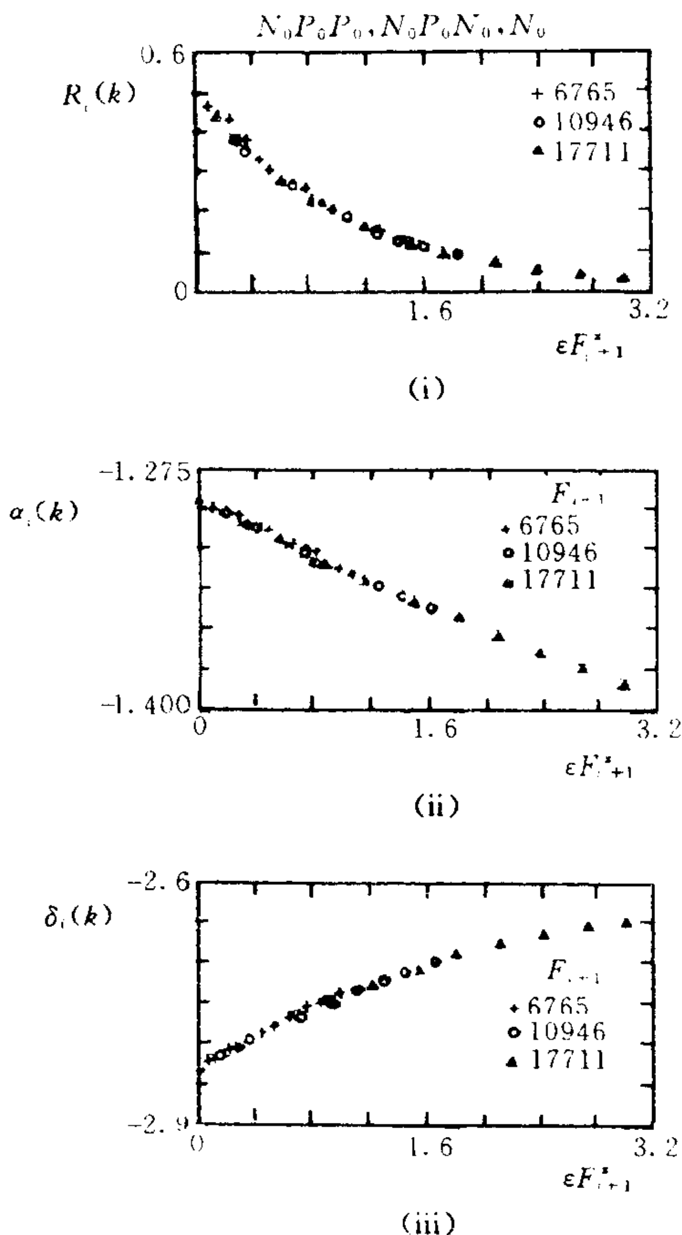


图 10-3

$$f^{(F_{i+1})}(x) - F_i \approx \alpha^i \bar{f}(\alpha^i x), \tag{10.22}$$

其中 $\bar{f}$ 与 i 无关, 是一普适函数.

上面所得标度律只与连分数的无穷序列有关, 例如 [3, 1, 4, 1, 1, 1, ···] 与 [1,1,1,···] 有相同的标度律, 但不同的无穷序列有不同的标度指数. 表 10.1 给出了某些具有周期连分数的无理数

的标度指数 x 、y. 在所有情况下都发现有 $z = 2x$ 的关系.

表 10.1

连分数	x	y
$[1,1,1,\cdots]$	0.527	2.164
$[2,2,2,\cdots]$	0.524	2.175
$[3,3,3,\cdots]$	0.517	2.195
$[4,4,4,\cdots]$	0.511	2.220
$[5,5,5,\cdots]$	0.496	2.244
$[1,2,1,2,\cdots]$	0.516	2.180
$[1,3,1,3,\cdots]$	0.498	2.204
$[1,4,1,4,\cdots]$	0.483	2.227
$[3,5,3,5,\cdots]$	0.502	2.225
$[1,2,3,1,2,3,\cdots]$	0.516	2.192
$[3,2,1,3,2,1,\cdots]$	0.516	2.192
$[2,2,3,2,2,3,\cdots]$	0.523	2.188
$[3,4,3,4,\cdots]$	0.514	2.208
$[2,6,2,6,\cdots]$	0.486	2.240
$[1,12,1,12,\cdots]$	0.392	2.356

§11 临界准周期轨道的分形结构

标准圆映射 (1.6) 在 $k < 1$ 时的准周期轨道在 S^1 上分布是连续且光滑的，其维数是 1. 当 $k = 1$ 时轨道仍连续，但不再光滑，且具有自相似结构. 为了研究这种自相似性，要引入广义维数 [18].

考察 d 维空间中的一个点集，以边长为 ε 的 d 维盒子去覆盖这个点集. 设总点数为 N, 第 i 个盒子中的点数为 N_i, 定义 $P_i = N_i/N$. 广义维数 D_q 定义为

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \to 0} \log \Big(\sum_i P_i^q \Big) / \log \varepsilon, \tag{11.1}$$

其中 q 可以是任意实数， D_0 为豪斯多夫维数， D_1 是信息维数， D_2 是关联维数.

对线度为 l 的点集，定义关联函数

$$C_q(l,\varepsilon)=\sum_{i}^{(1/\varepsilon)^d} P_i^q(l,\varepsilon). \tag{11.2}$$

由于自相似性，点集可能分解为 R 个与原点集相似而线度分别为 l/S_α 的点集 $(\alpha=1,2,\cdots,R)$, S_α 为标度因子. (11.2) 也可表示为

$$C_q(l,\varepsilon)=\sum_{\alpha=1}^{R}\sum_{i_\alpha=1}^{(l/\varepsilon S_\alpha)^d} P_{i_\alpha}^q(l/S_\alpha,\varepsilon). \tag{11.3}$$

利用自相似性，应有关系式

$$P_{i_\alpha}(l/S_\alpha,\varepsilon/S_\alpha)=P_\alpha P_i(l,\varepsilon). \tag{11.4}$$

所以，(11.3) 变为

$$C_q(l,\varepsilon)=\sum_{\alpha=1}^{R}\sum_{i\in\alpha}^{(l/S_\alpha\varepsilon)^d}[P_\alpha P_i(l,S_\alpha\varepsilon)]^q=\sum_{\alpha=1}^{R}P_\alpha^q C_q(l,S_\alpha\varepsilon). \tag{11.5}$$

根据 (11.1), 有 $C_q(l,\varepsilon)\propto\varepsilon^{(q-1)D_q}$. 把这个关系式代入 (11.5), 得决定 D_q 的隐式关系

$$\sum_{\alpha=1}^{R}P_\alpha^q S_\alpha^{(q-1)D_q}=1. \tag{11.6}$$

此外，还可引入奇异性 α 及其谱 $f(\alpha)$ 来表示点集的分形性质 [19]. 据标度性，可给线度为 l_i 的点集的概率定义一个标度指数 α,

$$P_i\propto l_i^\alpha. \tag{11.7}$$

当空间被分成线度为 l 的格子时，设 α 取 α 与 $\alpha+d\alpha$ 之间值的格子数为

$$d\alpha\rho(\alpha)l^{-f(\alpha)}, \tag{11.8}$$

$f(\alpha)$ 可看作具有 α 奇性的格子分布的分维. 利用 (11.7) 与 (11.8), (11.1) 可写为

$$D_q = \lim_{l \to 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \int \rho(\alpha) l^{-f(\alpha)} l^{q\alpha} d\alpha}{\ln l}. \tag{11.9}$$

当 $l \to 0$ 时, $q\alpha - f(\alpha)$ 的极小值对积分作出主要的贡献. 这样的 α 由下式确定:

$$f'(\alpha(q)) = q, \quad f''(\alpha(q)) < 0. \tag{11.10}$$

于是, (11.9) 成为

$$D_q = \frac{1}{q-1}[q\alpha(q) - f(\alpha(q))]. \tag{11.11}$$

利用 (11.10), 可由 (11.11) 解出 $\alpha(q)$:

$$\alpha(q) = \frac{d}{dq}[(q-1)D_q]. \tag{11.12}$$

由 (11.12) 与 (11.11), 也可将 $f(\alpha)$ 表为 D_q.

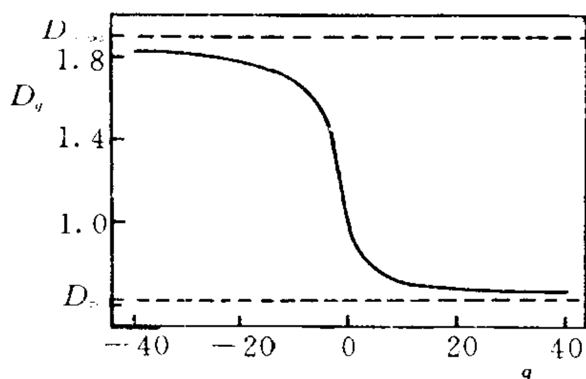


图 11-1

$k = 1$ 时转数为黄金分割数的准周期轨道的豪斯多夫维数 $D_0 = 1$, 但对非零的 q 值, $D_q \neq 1$. 考察轨道 $f^{(i)}(0)$, 迭代至 $i = F_{17} = 2584$, $l_i = x_{i+F_{16}} - x_i \pmod 1$ 取为自然标度, 计算得到如图 11-1 与图 11-2 所示的 D_q 曲线与 $f(\alpha)$ 曲线. $q \to \pm\infty$ 时 D_q 反映了最稠密区 (α 最大) 与最稀疏区 (α 最小) 的标度性质. $x \approx 0$ 区 $f' \approx 0$ 是最稀疏

区，有标度因子 $\alpha_{GM}=1.2885$，即 (10.19). $P_{-\infty}\propto 1/F_n\propto\bar{\rho}^n$，$l_{-\infty}\propto\alpha_{GM}^{-n}$，所以有

$$D_{-\infty}=\ln\bar{\rho}/\ln\alpha_{GM}^{-1}=1.8980.$$

$k=1$ 时圆映射的三次拐点把最稀疏区映射为最稠密区，所以最稠密区的标度因子为 α_{GM}^3，有 $P_{\infty}\propto\bar{\rho}^n$，$l_{\infty}\propto\alpha_{GM}^{-3n}$，由此得

$$D_{\infty}=\ln\bar{\rho}/\ln\alpha_{GM}^{3}=0.6326.$$

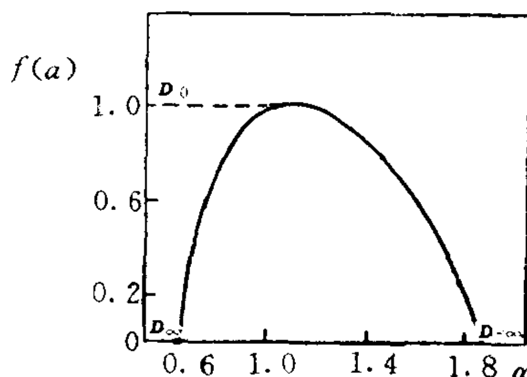


图 11-2

关于 $D_{-\infty}$ 与 $D_{+\infty}$ 的估计，与图 11-1 完全符合.

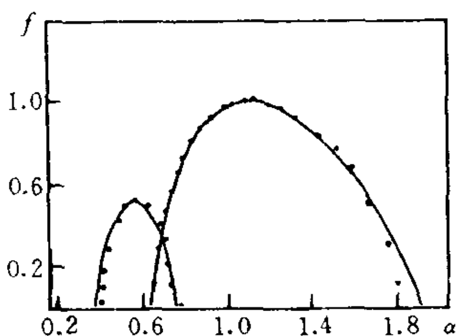


图 11-3

临界准周期轨道的上述标度性质，已在瑞利 - 贝纳德对流实验中观察到 [20]. 在该实验中，以水银为对流介质，在容器中形成两个对流卷筒. 当温差增加到一定值时，两个卷筒的分界线发生水平的小幅度的摇摆运动. 除了这个自然频率外，Libchaber 等还用电磁信号加上另一个驱动频率：在中心垂直地加一交流电流，并平行于对流卷筒轴水平地加一磁场，然后按外力周期在离散时间测量系统的温度，用时间序列重构相空间的办法，在二维平面上重构吸引子，计算 D_q 与 $f(\alpha)$. 图 11-3 给出了分别对倍周期分岔的费根鲍姆吸引子与临界黄金分割准周期轨道的测量结果. 圆点是测量结果，曲线是理论结果，理论与实验符合得很好.

§ 12 重正化群分析

上节的数值结果表明，在准周期情况可以定义与倍周期情况类似的标度律，因而可以对它作重正化群方程的分析．下面介绍费根鲍姆、 L.P. Kadanoff 与 S.J. Shenker 的工作 [21]．据 (10.22), 我们定义函数

$$g^n(x) = f^{(F_{n+1})}(x) - F_n. \tag{12.1}$$

因为 $f^{(n)}(x+1) = f^{(n)}(x) + 1$, 所以

$$\begin{aligned} g^n \circ g^{n-1} &= f^{(F_{n+1})}(f^{(F_n)}(x) - F_{n-1}) - F_n \\ &= f^{(F_n + F_{n+1})}(x) - (F_{n-1} + F_n) = g^{n+1}. \end{aligned} \tag{12.2}$$

即有

$$g^{n+1} = g^n \circ g^{n-1} \quad \text{或} \quad g^{n+1} = g^{n+1} \circ g^n. \tag{12.3}$$

据 (10.22) 可知，当 $n \gg 1$, $|x| \ll 1$ 时，

$$g^n(x) \approx \alpha^{-n} \bar{f}(\alpha^n x). \tag{12.4}$$

把 (12.4) 代入 (12.3), 得到普适函数 $\bar{f}$ 所满足的方程为

$$\bar{f}(x) = \alpha \bar{f}(\alpha \bar{f}(\alpha^{-2} x)) \tag{12.5a}$$

或

$$\bar{f}(x) = \alpha^2 \bar{f}(\alpha^{-1} \bar{f}(\alpha^{-1} x)). \tag{12.5b}$$

如要考虑重正化的过程，定义

$$g_n(x) = \alpha^n g^n(\alpha^{-n} x), \tag{12.6}$$

则 $\bar{f}$ 是递推关系为

$$g_{n+1}(x)=\alpha g_n(\alpha g_{n-1}(\alpha^{-2}x)) \tag{12.7a}$$

或

$$g_{n+1}(x)=\alpha^2 g_{n-1}(\alpha^{-1}g_n(\alpha^{-1}x)) \tag{12.7b}$$

的不动点.

因为 g_{n+1} 同时与 g_n 及 g_{n-1} 有关, 因此要定义由 (g_n,g_{n-1}) 到 (g_{n+1},g_n) 的重正化群变换. 可以如下地定义重正化群算符 R_a 与 R_b:

$$R_a\begin{pmatrix}u(x)\\v(x)\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\alpha u(\alpha v(\alpha^{-2}x))\\u(x)\end{pmatrix}, \tag{12.8a}$$

$$R_b\begin{pmatrix}u(x)\\v(x)\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\alpha^2 v(\alpha^{-1}u(\alpha^{-1}x))\\u(x)\end{pmatrix}. \tag{12.8b}$$

(12.7a) 或 (12.8a) 与 (12.7b) 或 (12.8b) 有相同的不动点. 在一般情况下 (12.8a) 与 (12.8b) 是不等价的, 但如取初始条件使

$$g_0(\alpha^{-1}g_1(\alpha x))=\alpha^{-1}g_1(\alpha g_0(x)), \tag{12.9}$$

则 (12.8) 的两个递推关系彼此等价.

记不动点 $\bar{f}$ 处 R_a 与 R_b 的线性化算符为 DR_a 与 DR_b, 由 (12.9) 与 (12.10) 得这些算符的定义为

$$DR_a\begin{pmatrix}u(x)\\v(x)\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\alpha u(\alpha\bar{f}(\alpha^{-2}x))+\alpha^2\bar{f}'(\alpha\bar{f}(\alpha^{-2}x))v(\alpha^{-2}x)\\u(x)\end{pmatrix}, \tag{12.10a}$$

$$DR_b\begin{pmatrix}u(x)\\v(x)\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\alpha^2 v(\alpha^{-1}\bar{f}(\alpha^{-1}x))+\alpha\bar{f}'(\alpha^{-1}\bar{f}(\alpha^{-1}x))u(\alpha^{-1}x)\\u(x)\end{pmatrix}. \tag{12.10b}$$

对于不动点 $\bar{f}$ 邻域的研究，归结于对 DR_a 与 DR_b 的本征值与本征函数的研究.

DR_a 与 DR_b 有一组与拓扑共轭自由度相联系的本征函数. 考虑函数序列

$$g_n(x) \equiv H_n \circ \bar{f} \circ H_n^{-1}, \tag{12.11}$$

式中 H_n 为接近恒等变换的变换,

$$H_n = x + \varepsilon\sigma_n(x), \tag{12.12}$$

如果让 $\sigma_n(x)$ 满足

$$\sigma_{n+1}(x) = \alpha\sigma_n(\alpha^{-1}x), \tag{12.13}$$

则 $g_n(x)$ 满足递推关系 (12.7). 把 (12.11) 在不动点 $\bar{f}(x)$ 处对 ε 展开，得

$$g_n(x) = \bar{f}(x) + \varepsilon h_n(x), \tag{12.14}$$

其中

$$h_n(x) = \sigma_n(\bar{f}(x)) - \bar{f}'(x)\sigma_n(x). \tag{12.15}$$

代入 (12.10) 式可见，如果让

$$\sigma_{n+1}(x) = \lambda\sigma_n(x), \tag{12.16}$$

则 $(h_n(x), h_{n-1}(x))$ 就是 DR_a 与 DR_b 的本征值为 λ 的本征函数. 作为本征函数， h_n 的下标 n 是没有意义的，它们都有相同的本征值 λ. 由 (12.13) 与 (12.16), 得

$$\alpha\sigma(\alpha^{-1}x) = \lambda\sigma(x). \tag{12.17}$$

可选单项式 $\sigma(x) = x^p$, 得

$$\lambda = \alpha^{1-p}, \quad p \geq 0. \tag{12.18}$$

相关本征值 $\lambda=\alpha$ 对应于坐标平移，边缘本征值 $\lambda=1$ 对应于坐标放大.

现在开始研究重正化群方程的解. 先讨论平庸解，它对应于 $|k|<1$ 的情况. 因为可以把 $\bar{f}$ 等价于一简单转动，它是 x 的线性函数. 容易检验，下面的函数

$$\bar{f}(x)=-1+x, \quad \alpha=-\bar{\rho}^{-1} \tag{12.19}$$

满足不动点方程 (12.5), 其中 $\bar{\rho}$ 为 $(\sqrt{5}-1)/2$. 关于线性化算符的本征函数问题，我们感兴趣的是 ρ_i 与收敛率 (10.13) 有关的微扰，这种扰动只改变 $\bar{f}$ 的常数项. 设 u 、v 为常数，由 (12.10) 的本征值方程得

$$\alpha u+\alpha^2 v=\lambda u, \quad u=\lambda v. \tag{12.20}$$

它有两个解，一个是 $\lambda=1$, 它已包含在 (12.18) 内；另一个解是

$$\lambda=-\alpha^2=-\bar{\rho}^{-2}, \tag{12.21}$$

这就是 ρ_i 的收敛率. 线性化方程的本征值问题，除 (12.18) 与 (12.21) 外，无其他的解.

下面讨论 $k=1$ 的情况. 这时 $f'(0)=f''(0)=0$, 作为 f 无限次迭代的结果，$\bar{f}$ 必可展为 x^3 的级数. 考虑函数

$$g(x)\equiv\alpha f(x). \tag{12.22}$$

$\bar{f}$ 与 f 同样是 x 的单调增函数，$\alpha<0$, 所以 $g(x)$ 是单调减函数. 采用 $g(x)$, (12.5) 式变为

$$g(x)=\alpha g(g(x/\alpha^2)), \tag{12.23a}$$

$$g(x) = \alpha^2 g(\alpha^{-2} g(x/\alpha)). \tag{12.23b}$$

方程对标度变换保持不变，可以规定

$$g(0) = 1. \tag{12.24}$$

让 (12.23a) 中 $x = 0$, 得

$$g(1) = \alpha^{-1}. \tag{12.25}$$

让 (12.23a) 中 $x = 1$, 得

$$g^{(2)}(\alpha) = \alpha. \tag{12.26}$$

因为 $g \circ g$ 是单调的，$g \circ g$ 的不动点就是 g 的不动点，(12.26) 表明 α^{-2} 是 g 的不动点. 由此可见 (12.23a) 中的 $g(x/\alpha^2)$ 把 $[0,1]$ 映射到 $[\alpha^{-2},1]$. 即 (12.23a) 在 $[0,1]$ 内是自决定的，不需要区间之外的信息，它在 $[0,1]$ 内有作为 x^3 的解析函数的解. 式 (12.23b) 也可给出 (12.26), 这表明它与 (12.23a) 是自洽的. 因为 $\alpha < 0$, (12.23b) 把 (12.23a) 的解延拓到 $[\alpha g^{(-1)}(0), 0]$ 区间. 于是问题归结为求 $[0,1]$ 内 (12.23a) 的解.

数值求解式 (12.23a) 时，让

$$g_N(x) = 1 + \sum_{n=1}^{N} c_n^{(N)} x^{3n},$$

使其在 $x_i = (i/N)^{1/3}$, $i = 1, 2, \cdots, N$ 个点上满足

$$g(1)g(x) - g(g(x(g(1))^2)) = 0, \tag{12.27}$$

结果得

$$\alpha = -1.288575 \pm 0.000001. \tag{12.28}$$

对于 (12.10) 的本征值方程，也采用 x^3 多项式展开的办法，能得到 δ 与 α^{-3p} $(p=0,1,2,\cdots)$ 等本征值，所得的

$$\delta=-2.83361, \tag{12.29}$$

(12.28)、(12.29) 与数值实验结果 (10.19)、(10.15) 符合得很好.

§13 临界线上转数阶梯标度性质的数值研究

既然在临界线 $k=1$ 上发生了由准周期到混沌的转变，自然会问：在 $k=1$ 线上有多少 ω 值具有周期运动，又有多少 ω 值具有准周期运动？本节的目的就是要研究这些问题.

利用方程 (4.1) 与 (4.3) 可以算出任一转数 p/q 在给定 k 值处的 ω 区间长度 $\Delta\omega(p/q)$ 来. Jensen、Bak 和 Bohr 对 [9] $q\le 95$ 的 1388 个区间作了计算，得出了如下的规律性. 首先将转数对 ω 作图，在 $k=1$ 时得到如图 13-1 所示的结果. 图形显示了相似性结构，把其中一个局部图形放大，得到了与原图相似的图.

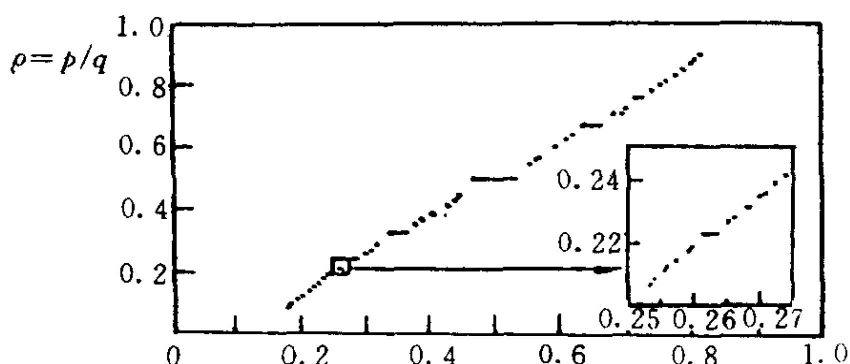


图 13-1

为了研究有理数是否占据了整个 ω 轴，可计算 $\Delta\omega(p/q)>r$ 的总区间长度 $S(r)$. $N(r)\equiv[1-S(r)]/r$ 可以看作 r 尺度上含有

准周期点的“空洞”的数目．将 $\ln N(r)$ 对 $\ln r$ 作图，发现它是一条很好的直线，即有

$$N(r) \propto r^{-D}, \quad D = 0.8700 \pm 3.7 \times 10^{-4}. \tag{13.1}$$

因此

$$1 - S(r) \propto r^{1-D}. \tag{13.2}$$

它在 $r \to 0$ 时为 0. 由此可见，$k = 1$ 时具有有理数转数的 ω 的测度是 1, 具有无理数转数的 ω 的测度是 0. 图 13-1 中的阶梯是完全的, 由于它具有自相似性, 又称其为魔梯. (13.1) 式表明, D 就是具有无理数转数的点集的维数，它是豪斯多夫维数.

$k < 1$ 时 ω 存在有限测度的准周期运动．可用下面的方法计算 k 值处的准周期参数的测度 $M(k)$. 设 $r(N_1, k)$ 是 k 值处有 N_1 个有理数转数 $\Delta\omega(p/q) > r$ 的 r 值．数值计算发现 $\ln r(N_1, k)$ 对给定的 N_1 是 $(1-k)$ 的线性函数，即有

$$r(N_1, k) = r(N_1, 1)\exp[-b(N_1)(1-k)]. \tag{13.3}$$

$b(N_1)$ 与 N_1 的关系是

$$b(N_1) \propto N_1^{1/D\nu}, \quad 1/D\nu = 0.44 \pm 0.02. \tag{13.4}$$

式 (13.3) 与 (13.4) 表明，在 k 处 N_1 被切断在

$$N_0(k) \propto (1-k)^{-D\nu}. \tag{13.5}$$

根据 (13.1) 式，这 $N_0(k)$ 个周期区间 $\Delta\omega$ 在 $k = 1$ 处大于

$$r_0 \approx (1-k)^{\nu}, \quad \nu \approx 2.63. \tag{13.6}$$

也就是说 $k=1$ 处宽度小于 r_0 的有理数转数阿诺尔德舌头在 (13.6) 所示的 $k(<1)$ 处几乎消失. 如把 r_0^{-1} 比之相变理论中的关联长度 ξ, $(1-k)$ 比之温差 $\Delta T=T-T_c$, 则有与相变理论中相同的关系 $\xi\propto(\Delta T)^{-\nu}$. 正因为这个类比，引入了 ν 这一指数. 现在可以利用 (13.3) 式计算 $M(k)$. 据 r 的定义, $\int rdN_1$ 给出了有理区间的总长度. 这个长度在 $k=1$ 时为 1, 即 $\int^{\infty} r(N_1,1)dN_1=1$. 因此， $k(\leq 1)$ 处准周期测度为

$$M(k)=\int^{\infty}[r(N_1,1)-r(N_1,k)]dN_1. \tag{13.7}$$

把 (13.3) 式代入，并利用 $k=1$ 时的 (13.1) 式，即 $N_1\propto r^{-D}$, 得到

$$M(k)\propto(1-k)^{\nu(1-D)}\equiv(1-k)^{\beta},\quad \beta\approx 0.34\pm 0.02. \tag{13.8}$$

β 与 D,ν 之间有关系

$$D=1-\beta/\nu. \tag{13.9}$$

β 与二级相变理论中磁化率与温度关系的临界指数相对应.

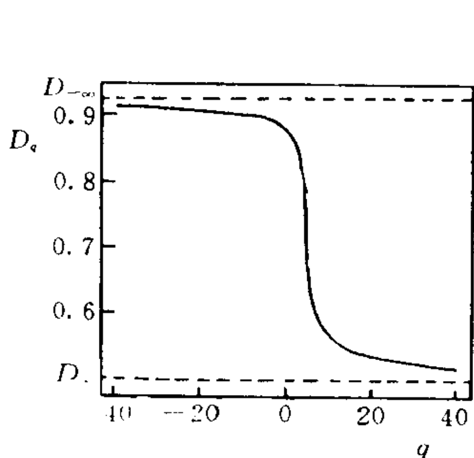


图 13-2

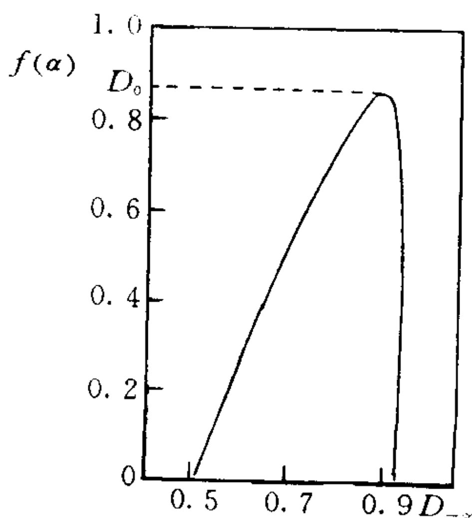


图 13-3

(13.1) 式给出的 D, 实为定义 (11.1) 中的 D_0. 现在研究 D_q 与 $f(\alpha)$. 按法里树的顺序, 取 1024 个锁相区间. 锁相区间的长度取作 l_i, 相邻转数的差取作 P_i. 得到了如图 13-2 与 13-3 所示的 D_q 曲线与 $f(\alpha)$ 曲线. 其中 $D_{\pm\infty}$ 可如下解析地计算: 黄金分割数序列区为最稀疏区, n 趋向无限时 F_n/F_{n+1} 的区间长度 $l_{-n} \propto F_n^{-y}$, $y = 2.1644\cdots$; 转数差 $P_{-n} \propto F_n/F_{n+1} - F_{n+1}/F_{n+2}$, 取 $F_n \propto \tilde{\rho}^{-n}$, 得 $l_{-n} \propto \tilde{\rho}^{ny}$, $P_{-n} \propto \tilde{\rho}^{2n}$, 所以

$$D_{-\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln P_{-n}}{\ln l_{-n}} = \frac{2}{y} = 0.9240,$$

与计算结果相一致. 转数为 $1/q$ 的序列是最密区. 这个区域中因为 $\overline{\Delta x} \propto 1/q$ 很小, 可将圆映射作连续近似

$$\frac{dx}{di} = \omega - \frac{k}{2\pi}\sin(2\pi x).$$

积分, 得

$$x(i) = \frac{1}{\pi}\arctan\left[\frac{k}{2\pi\omega} - \sqrt{1-\left(\frac{k}{2\pi\omega}\right)^2}\tan\left(\sqrt{\omega^2-\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2}\, i\pi\right)\right].$$

由 $x(q) = 1$ 得转数 ρ 与 ω 的关系 $\rho \propto \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2}$, 在 $\omega \geq \frac{k}{2\pi}$ 邻域,

$$\rho \propto \left(\omega - \frac{k}{2\pi}\right)^{1/2}.$$

取 $P_i \propto \rho$, $l_i \propto \omega - k/2\pi$, 得 $P_i \propto l_i^{1/2}$. 所以有

$$D_\infty = \ln P_\infty / \ln l_\infty = 1/2.$$

由图可见, $f(\alpha)$ 并不通过 $(D_\infty, 0)$ 点. 为了改进这一结果, 图 13-3 的左边部分曾采用了加速收敛的办法.

还可定义另一维数 D'. 将 $\Delta\omega(p/q)$ 对有相同分母 q 的不同分子 p 求平均 $\langle\Delta\omega(p/q)\rangle_p$. 数值计算发现,

$$r_q = \langle\Delta\omega(p/q)\rangle_p \propto q^{-\delta}, \quad \delta = 2.292 \pm 0.0034. \tag{13.10}$$

指数 δ 可如下地与 D' 联系起来: 所有分母比 q 小的有理数的数目为 $N_q \propto q^2$, 将 D' 定义为

$$D' = \frac{\ln N_q}{\ln 1/r_q} = \frac{2}{\delta} = 0.873 \pm 0.0021. \tag{13.11}$$

看来没有理由说 D' 作为维数的定义是恰当的, 也没有理由要求 $D' = D$, 但数值结果表明 D' 正是 D. 对于菲波那契序列, 则有 $\Delta\omega(F_i/F_{i+1}) \propto F_{i+1}^{-2.16}$, 它显然与 (13.10) 不同.

除了 ω 变量的标度律外, 仿照菲波那契序列, 可定义关于坐标 x 的标度律. 对 p/q 轨道的 q 个点 $x_1, x_2, \cdots, x_q$, 定义 $d_1(p/q) = \min(x_i, 1 - x_i)$. 对所有 p 求平均, 数值计算发现,

$$d_1(q) = \langle d_1(p/q)\rangle_p \propto q^{-\alpha}, \quad \alpha = 0.421 \pm 0.0025. \tag{13.12}$$

这个结果看来也与菲波那契序列 $d(F_{i+1}) \propto F_{i+1}^{-0.527}$(根据 (10.16)~(10.19), $d_{i-1}/d_i = -\bar{\rho}^{-x} \propto (F_{i-1}/F_i)^{-x}$, 所以 $d(F_{i+1}) \propto F_{i+1}^{-x}$, $x = 0.527$) 不同. 此外, 对 $x_1, x_2, \cdots, x_q$ 中最小距离作的计算表明,

$$d_{\min}(q) = \langle d_{\min}(p/q)\rangle_p \propto q^{-\alpha'}, \quad \alpha' = 1.58.$$

关于魔梯的标度性质具有普适性 [9],[22]. 数值计算表明, 在标准圆映射中加 $a\sin^3(2\pi x)$ 不会改变 D_0 的数值. D_0 只与拐点的幂次有关, 表 13.1 给出了由数值计算得到的不同幂次下 D_0 的数值 [22].

表 13.1

r	1.0	1.5	2.0	3.0
D_0	1.00	0.95 ± 0.005	0.915	0.87
r	4.0	5.0	6.0	7.0
D_0	0.83 ± 0.01	0.81	0.80	0.78
r	8.0	9.0	12	14
D_0	0.77	0.75	0.73	0.72
r	16	20	26	40
D_0	0.70	0.68 ± 0.015	0.66	0.64

其中 r 是拐点的幂次. 这些数据表明,

$$D_0(r) = r^{-1/8}. \tag{13.13}$$

因此有关系

$$D_0(f \circ g) = D_0(f) \cdot D_0(g). \tag{13.14}$$

(13.13) 与 (13.14) 不适用于 $r < 1$ 的情况. 例如设 $f(x) = \omega + g(x)$, $g(x+1) = g(x) + 1$, $g(x)$ 有 r 次拐点, $g^{-1}(x)$ 有 $1/r$ 拐点, 则可以证明 $D_0(g) = D_0(g^{-1})$. 这是因为

$$f_{\omega,g} = \omega + g(x) \quad 与 \quad f_{1-\omega,g^{-1}} = 1 - \omega + g^{-1}(x) \tag{13.15}$$

的周期轨道之间存在一一对应的关系. 容易证明, 与 $f_{\omega,g}$ 的 p/q 轨道 $(x_1, x_2, \cdots, x_q)$ 对应的 $f_{1-\omega,g^{-1}}$ 有 $(q-p)/q$ 轨道 $(g(x_1), g(x_q) - p + 1, g(x_{q-1}) - p + 2, \cdots, g(x_2) - p + q - 1)$. 因此, 两者有同样的魔梯维数.

最后我们讨论一下函数或微商非连续的情况[22]. 最简单的非连续函数是线性映射

$$f(x) = \omega + 1 - \alpha(1 - x), \qquad x \in [0, 1), \quad \alpha \in [0, 1) \tag{13.16}$$

利用条件 $f(x+1) = f(x) + 1$ 可将其推广到整个实轴, 不连续的间隔为 $(1 - \alpha)$. 转数为 p/q 的轨道的稳定区间长度 $\Delta\omega(p/q)$ 可

以解析地求得：

$$\Delta\omega(p/q) = (1-\alpha)^2 \frac{\alpha^{q-1}}{1-\alpha^q}, \tag{13.17}$$

它与 p 无关. 容易看出，由于 $f'(x) = \alpha < 1$, 只存在周期轨道，因此在 ω 轴上是完全锁相的. 由于周期区间长度 Δ 随周期长度指数地趋向 0, $\alpha^q \propto e^{-q\ln\frac{1}{\alpha}}$, 魔梯的分维为 0.

在搞清楚映射 (13.16) 之后，可知函数连续而微商不连续的下述映射

$$f(x) = \begin{cases} \omega, & 0 \le x < 1-\alpha; \\ \omega + (x+\alpha-1)/\alpha, & 1-\alpha \le x < 1 \end{cases} \tag{13.18}$$

也是一样的. 因为其 g 函数是 (13.16) 的 g 函数的逆函数，其魔梯维数也是 0. 当微商不连续，而其斜率有限时，如

$$f(x) = \begin{cases} \omega + \alpha x, & \text{当 } 0 \le x < \dfrac{\beta-1}{\beta-\alpha} \text{ 时}; \\ \omega + 1 - \beta(1-x), & \text{当 } \dfrac{\beta-1}{\beta-\alpha} \le x < 1 \text{ 时}, \end{cases}$$

则 D_0 与斜率有关，其中 $\alpha < 1 < \beta$. 例如，对于 $(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 有 $D_0(f) \approx 0.92$, 对 $(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{8}, 2\right)$ 有 $D_0(f) \approx 0.81$. 这两个例子的 r 都为 1, 其 D_0 与表 13.1 不同，这表明了函数连续与微商连续对维数普适性的重要性.

§14 关于魔梯的重正化研究

前节提到的魔梯标度性质的普适性，有两方面的含义. 其一是魔梯的每一间隙都有相同的维数 D; 其次，更重要的是，D 只与拐点的幂次有关.

现在先论证第一点. 取任一对锁频区 p/q 与 p'/q', 其间的间隔为 $\bar{l}$. $\bar{l}$ 中有锁频区 $(p+p')/(q+q')$, 在新老锁频区之间有间隔 l_1 与 l_2. 这一法里树结构可一直继续到有很多间隔 l_i. 豪斯多夫维数可由 (11.6) 式即 $\sum_i S_i^{-D}=1$ 得到, 其中 $S_i=\bar{l}/l_i$. 将由第 n 级法里树得到的维数记为 D_n, 将 $\min_i\{S_i^{-D}\}$ 记为 S^{-n}, 让 $D_n=D^*+a(S^{-n})^x$, 可得极限值 D^*. P. Cvitanovic 等[23] 对 $p/q=5/13$ 、 $p'/q'=8/21$ 算至 11 级法里树, 得到 $D^*=0.868\pm0.002$. 结果与上节全区间数值结果一致. 令人惊奇的是, 只取两个间隔也可得到很接近的 D^* 值, 误差小于 1%. 所得 D^* 值与 p/q 、 p'/q' 的选择无关.

上节的重正化作法是只对黄金分割转数这一局部进行的. 魔梯关系到全局结构, 但由于自相似性, 每一间隔又都有相同的维数. 为了研究这种标度性质, 上述作者把 §12 的重正化群方程推广到包含与 ω 相对应的参数. 既然 p/q 与 p'/q' 的选择是任意的, 那么也可以选择它们是菲波那契数之比. 定义

$$g_0^n(x)=c_{n+1}\left[f_{\omega_{n+1}}^{(F_{n+1})}(x/c_{n+1})-F_n\right], \tag{14.1}$$

它在 $x=0$ 处有超稳定不动点. 设超稳定轨道的参数之间有关系 $\omega_{n+1}=\omega_n+\Delta_n$, 并规定 g 函数的 F_{n-1}/F_n 与 F_n/F_{n+1} 超稳定轨道之间的参数区间为 $[0,1]$, 则 $g^n(x)$ 的单参数族可用下标 p 定义为

$$g_p^n(x)=c_{n+1}\left[f_{\omega_{n+1}+p\Delta_{n+1}}^{(F_{n+1})}(x/c_{n+1})-F_n\right]. \tag{14.2}$$

对于 $g_p^{n-1}(x)$ 说, 参数 $\omega_{n+1}+p\Delta_{n+1}=\omega_n+\Delta_n+p\Delta_{n+1}$ 相当于 $1+p/\delta_n$, 其中 $\delta_n\equiv\Delta_n/\Delta_{n+1}$. 即在 f 的参数 $\omega_{n+1}+p\Delta_{n+1}$ 值处 $g^n(x)$ 应写为 $g_p^n(x)$, $g^{n-1}(x)$ 应写为 $g_{1+p/\delta_n}^{n-1}(x)$, $g^{n-2}(x)$ 应写

为 $g^{n-2}_{1+1/\delta_{n-1}+p/\delta_{n-1}\delta_n}(x)$. 与 (12.7) 相应的递推关系现在可写为

$$g_p^n(x) = \alpha_n g^{n-1}_{1+p/\delta_n}(\alpha_{n-1} g^{n-2}_{1+1/\delta_{n-1}+p/\delta_{n-1}\delta_n}(x/\alpha_n\alpha_{n-1})), \quad (14.3)$$

其中 $\alpha_n = c_{n+1}/c_n$. 当 $n \to \infty$ 时，得到极限

$$g_p(x) = \alpha g_{1+p/\delta}(\alpha g_{1+1/\delta+p/\delta^2}(x/\alpha^2)). \quad (14.4)$$

归一化条件规定为 $g_0(0) = 0$, $g_1(0) = 1$. $p = 0$ 时， $g_0(x)$ 在 $x = 0$ 处有超稳定不动点. 在 $p = 0$ 的邻域， $g_p(x)$ 仍有稳定不动点，对应于锁频区. 在 $p = 1$ 处有另一锁频区，对应于下一级的非波那契数之比，锁频区的宽度是上一级的 $1/\delta$. 在 $p = 1 + 1/\delta$ 处则有另一锁频区，其宽度是 $p = 0$ 处的 $1/\delta^2$, 如此等等. 这样，研究 g_p 的不动点的稳定性，可得无限的锁频区. 这样确定的锁频区具有普适性.

但是上述的锁频区还不包含所有的法里序列，图 14-1 给出了不属于非波那契数之比的一些锁频区. 问题是是否能够由 $g_p(x)$ 得到它们？作为例子，考虑 $\dfrac{F_n + F_{n+2}}{F_{n+1} + F_{n+3}}$. 这一序列对应于函数

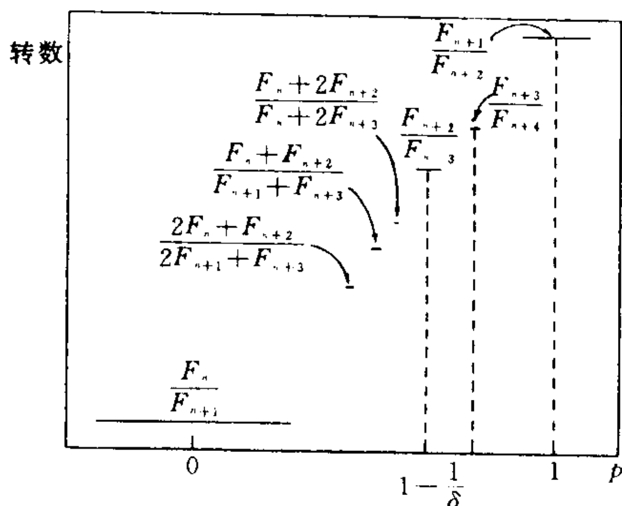


图 14-1

$$q_p^{n+3}(x) = c\big[f^{(F_{n+3})}_{\omega_{n+1}+p\Delta_{n+1}}(f^{(F_{n+1})}_{\omega_{n+1}+p\Delta_{n+1}}(x/c) - F_n)\big] - F_{n+2}. \quad (14.5)$$

让 $n \to \infty$, 并取 $c = c_{n+1}$, 得到

$$q_p^{[3]}(x) = \frac{1}{\alpha^2} g_{-\delta+\delta^2(p-1)}(\alpha^2 g_p(x)). \quad (14.6)$$

如把 F_n/F_{n+1} 对应于 [0], F_{n+1}/F_{n+2} 对应于 [1], 则

$$(F_n + F_{n+2})/(F_{n+1} + F_{n+3})$$

的连分式表示对应于 [3]. 由 (14.6) 可得锁频区 [3] 的位置. 类似地, 对 F_{n+2}/F_{n+3} 与 $(F_n + F_{n+2})/(F_{n+1} + F_{n+3})$ 之间的 [2,2] 锁频区, 可由

$$q_p^{[2,2]}(x) = \frac{1}{\alpha^2} g_{-\delta+\delta^2(p-1)}(\alpha^2 g_p^{[3]}(x)) \tag{14.7}$$

的不动点的稳定区得到. 而 F_n/F_{n+1} 与 $(F_n+F_{n+2})/(F_{n+1}+F_{n+3})$ 之间的 [4] 锁频区, 可由

$$q_p^{[4]}(x) = q_p^{[3]}(x)(g_p(x)) \tag{14.8}$$

得到. 这个过程可无限地继续下去.

实际上, 作为 $g_p(x)$ 的近似, 可由 (1.6) 出发得到. 选取

$$f_\omega(x) = x + \omega - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x),\ \omega_{n+1} = 0.6066576201,$$

它对应于转数 144/233. 利用上面描述的过程, 得到如图 14-1 所示的 p 的锁频区间, 由它可得到魔梯分形的维数. 只考虑两个间隔, $\bar{l} = 0.6326$, $l_1 = 0.3425$, $l_2 = 0.2232$, 得 $D_1 = 0.858$. 逐步地做下去, 直至第四法里级, 并拟合其为 $D_n = D^* + a(S^n)^x$, 得到 $D^* = 0.867$. 它与简单的估计符合得很好, 但其收敛率较慢, 不能用它求得精确的结果.

§15 圆映射的一般标度性

§12 的重正化群理论又可称为是连分数重正化群理论. 它

只能对一个无理数进行. 为了得到递推关系, 这个无理数还必须是二次无理数. 但是有证据表明, 可能存在对任意转数都成立的全局结构. 例如, 前两节讨论的关于魔梯间隙的豪斯多夫维数只与临界圆映射的次数有关, 而与映射的函数形式无关. 又如, 人们推测具有任意转数 $\rho(f)=\rho(g)=[n_0,n_1,\cdots,n_k,\cdots]$ 的两个不同临界圆映射 f 与 g, 对它们作与连分数相应的重正化变换 $T_{n_k},T_{n_{k1}},\cdots,T_{n_0}$, 当 $k\to\infty$ 时, 变换的结果趋向相同. 用法里树结构可能把不同的无理数组织在一起, 给出全局的结果 [8].

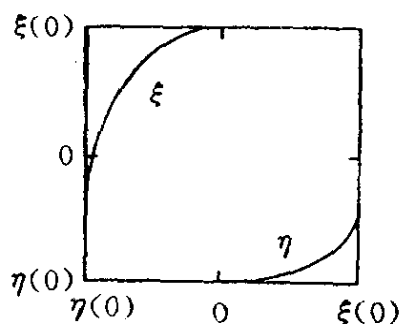


图 15-1

首先我们构造一种约化映射 (ξ,η), 坐标零点为其拐点, 并在这点把它们分成两个分支. 例如 f 可写为

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}_0=\begin{pmatrix}f\\ f-1\end{pmatrix}. \tag{15.1}$$

如图 15-1 所示 (对于转数小于 1/2 的临界圆映射). 显然有关系式

$$\begin{aligned}&\xi(0)>0,\quad \eta(0)<0,\ \xi'(x)\geq 0,\ \eta'(x)\geq 0,\\ &\xi\eta(0)=\eta\xi(0),\quad \xi(0)-\eta(0)=1.\end{aligned} \tag{15.2}$$

它在区间 $\eta(0)<x\leq\xi(0)$ 中的映射为

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}(x)=\begin{cases}\xi(x), & \text{当 } \eta(0)<x<0 \text{ 时};\\ \eta(x), & \text{当 } 0<x\leq\xi(0) \text{ 时}.\end{cases} \tag{15.3}$$

对于临界圆映射, $\xi'(0)=\eta'(0)=\xi''(0)=\eta''(0)=0$. 如 (15.1), f

是解析连续的，在 $|x|<\varepsilon$ 处有

$$\xi\eta(x)=\eta\xi(x) \tag{15.4}$$

是可交换的，或称其为恰当的.

设 $D(\xi), R(\xi), D(\eta), R(\eta)$ 分别是 ξ 与 η 的定义域与值域. 除非 $\xi(\eta(0))=0$, 否则有：

$$\text{条件 (0)} \qquad R(\eta)\subseteq D(\xi), \quad \text{如} \quad \xi\eta(0)<0; \tag{15.5a}$$

$$\text{条件 (1)} \qquad R(\xi)\subseteq D(\eta), \quad \text{如} \quad \xi\eta(0)>0. \tag{15.5b}$$

$\xi\eta(0)=0$ 时有超稳定周期 2 轨道.

可以用约化映射定义连分数重正化群. 为了定义标度常数 α, 先要找出离原点最近的两点. 设 $\xi\eta(0)<0$, 条件 (0) 成立，因为 $\eta(0)<\xi\eta(0)$, 可以找到一个正整数 n 使

$$\xi^{n-1}\eta(0)<0, \quad \xi^{n-1}\eta\xi(0)>0. \tag{15.6}$$

如 $\xi\eta(0)>0$, 条件 (1) 成立，让 $n=1$, (15.6) 即满足. 定义

$$\alpha_n=(\xi^{n-1}\eta(0)-\xi^{n-1}\eta\xi(0))^{-1}<-1, \tag{15.7}$$

重正化群算符 T_n 为

$$T_n\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}(x)=\alpha_n\begin{pmatrix}\xi^{n-1}\eta\\ \xi^{n-1}\eta\xi\end{pmatrix}\Big(x/\alpha_n\Big)\equiv\begin{pmatrix}\xi_R\\ \eta_R\end{pmatrix}(x). \tag{15.8}$$

(ξ_R,η_R) 具有性质：如果 (ξ,η) 是恰当的，即满足 (15.4), 则 (ξ_R,η_R) 也是恰当的； $T_n(\xi,\eta)$ 与 (ξ,η) 的转数之间有关系

$$\rho(T_n(\xi,\eta))=\frac{1}{\rho((\xi,\eta))}-n. \tag{15.9}$$

下面证明这个关系式.

根据 §2 定理 3 的证明, $[0,\xi(0)]$ 区间的不变测度即是映射的转数. 设 $I_0=[0,\xi(0)]$, $I_l=[\xi^{l-1}\eta(0),\xi^l\eta(0)]$, $l=1,2,\cdots,n$, $J_1=[\xi^{n-1}\eta(0),0]$ 和 $J_2=[0,\xi^n\eta(0)]$. I_l 的 $(n-1)$ 次映射必在 $J_1\cup J_2$ 内. I_0 内的不变测度是 (ξ,η) 的转数, J_1 相对于 $J_1\cup J_2$ 的不变测度是 $T_n(\xi,\eta)$ 的转数. 在 J_2 中选 x 使对于所有 $k>0$ 有 $(\xi,\eta)^{(k)}(x)\neq 0$, 并以 $m(k)$ 表示落在 I_0 中的迭代点的数目, 则 $\rho((\xi,\eta))=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{m(k)}{k}$. 现从序列中选出长度为 k_i 的属于上述区间的片段, $k_i<k_{l+i}$ 且 $(\xi,\eta)^{(k_i)}(x)\in J_1$, 它必经过所有 I_l 区间 $(l=1,2,\cdots,n)$. 让 $y=\alpha x$, $\alpha=(\xi^{n-1}\eta(0)-\xi^n\eta(0))^{-1}$, 则 $x,(\xi,\eta)(x),\cdots,(\xi,\eta)^{(k_i-1)}(x)$ 中有 $m(k_i)$ 个落在 I_0 中, 相应地 I_l 中也都落有相同数目的元素 $(l=1,2,\cdots,n)$. 因此, 在 J_1 中有 $k_i-nm(k_i)$ 个元素, 而 $J_1\cup J_2$ 中有 $m(k_i)$ 个元素. 相应地, 序列 $y,T_n(\xi,\eta)y,\cdots,(T_n(\xi,\eta))^{m(k_i)-1}y$ 中有 $k_i-nm(k_i)$ 个点落在 $I_0(T_n(\xi,\eta))$ 中. 所以

$$\rho(T_n(\xi,\eta))=\lim_{k_i\to\infty}(k_i-nm(k_i))/m(k_i)=\frac{1}{\rho((\xi,\eta))}-n.$$

作为 (15.8) 的特例, 考虑非波那契数的重正化群的不动点方程

$$T_1\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}(x)=\alpha_1\begin{pmatrix}\eta\\ \eta\xi\end{pmatrix}\left(x/\alpha_1\right)=\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}(x). \tag{15.10}$$

写成分量形式

$$\xi=\alpha\eta\alpha^{-1},\quad \eta=\alpha\eta\xi\alpha^{-1}. \tag{15.11}$$

把第一式代入第二式, 即得到与 §12 的 (12.23a) 式相同的重正化群方程.

我们感兴趣的是一般无理数，为此，构造法里重正化群变换

$$T\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=\begin{cases}T_0\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}, & \text{当 } \xi\eta(0)>0 \text{ 时;}\\ T_1\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}, & \text{当 } \xi\eta(0)<0 \text{ 时.}\end{cases} \tag{15.12}$$

这里

$$T_0\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}(x)=\alpha\begin{pmatrix}\xi\\\xi\eta\end{pmatrix}\Big(x/\alpha\Big),\quad \alpha=[\xi(0)-\xi\eta(0)]^{-1}; \tag{15.13}$$

$$T_1\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}(x)=\alpha\begin{pmatrix}\eta\xi\\\eta\end{pmatrix}\Big(x/\alpha\Big),\quad \alpha=[\eta\xi(0)-\eta(0)]^{-1}. \tag{15.14}$$

联系 T_1 与 T_0 的反射算符 R 定义为

$$R\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}(x)=-\begin{pmatrix}\eta\\\xi\end{pmatrix}(-x). \tag{15.15}$$

易见，有 $T_1=RT_0$, $RR=I$, 连分数重正化算符可表示为 $T_n=RT_1(T_0)^{n-1}$. 所以，重复地进行法里重正化变换包含了连分数重正化. 注意 (15.13) 与 (15.14) 定义的 $\alpha>1$, R 算符使其与连分数重正化中的 α 有相同的符号.

如果 (ξ,η) 有 $\rho=p/q$ 周期，这表明 η 定义域中有 p 个点，ξ 定义域中有 $(q-p)$ 个点. 由此可知 $(\xi,\xi\eta)$ 中 $\xi\eta$ 的定义域与 η 同，也有 p 个点，而 ξ 的定义域中少了被 $\xi\eta$ 占去的 p 个点，只剩 $q-2p$ 个点. 因此 $(\xi,\xi\eta)$ 的转数为 $p/(q-p)=\dfrac{\rho}{1-\rho}$. 按此推理，易证

$$\rho\left(T\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)=t^F\left(\rho\left(\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)\right), \tag{15.16a}$$

$$\rho\left(R\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)=r\left(\rho\left(\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)\right)\equiv 1-\rho\left(\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right). \tag{15.16b}$$

它们可简记为 $\rho T = t\rho$ 与 $\rho R = r\rho$. 这里 t^F 是 (3.11) 定义的与法里地址移位对应的转数变换算符. (15.16b) 表明转数对 1/2 的对称性 (3.13) 现在由 R 算符来表示.

现考虑对约化映射作 k 次法里重正化变换的结果

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}_k = T^k \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}_0 = \prod_{n=0}^{k-1}(T_{I_n}) \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}_0 \tag{15.17}$$

指标由右到左增加. 设 $\rho((\xi,\eta)_0) = b_F\langle I_0, I_1, \cdots, I_{k-1}, I_k, \cdots, I_N\rangle$, N 可能是无限大. $(\xi,\eta)_k$ 决定于过去的历史与将来的历史. 为表示这一点, 引入二元地址

$$\beta_k = b_F\langle I_{k-1}, \cdots, I_0\rangle, \quad \omega_k = b_F\langle I_k, I_{k+1}, \cdots\rangle. \tag{15.18}$$

这里, 我们把过去历史中最后一个地址排在最前面. 据此, 对 $\rho((\xi,\eta)) = b_F\langle I_0, I_1, \cdots, I_\infty, \rangle$, 记

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}_k (x)_{k\to\infty} \to \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}^* (x, \beta_k, \omega_k). \tag{15.19}$$

它可能与过去很早的历史无关而趋于一个极限.

进行一次重正化群的变换, 相当于去掉 ω_k 中的 I_k, 把它加到 β_k 中去, 即相当于进行一次变换 $\omega_{k+1} = t^F(\omega_k)$ 与 $\beta_{k+1} = S^F(\beta_k, \omega_k)$. t^F 由 (3.11) 与 (3.12) 定义, S^F 相当于其逆变换

$$S^F(\beta,\omega) = \begin{cases} S_0^F(\beta) = \dfrac{\beta}{1+\beta}, & \text{当 } \omega < 1/2 \text{ 时;} \\ S_1^F(\beta) = \dfrac{1}{2-\beta}, & \text{当 } \omega > 1/2 \text{ 时.} \end{cases} \tag{15.20}$$

利用这些定义, 可写出重正化群的不动点方程

$$T\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}^* (x,\beta,\omega) = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}^* (x, S^F(\beta,\omega), t^F(\omega)). \tag{15.21}$$

关于 1/2 的对称性，可写为

$$R\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}^*(x,\beta,\omega)=\begin{pmatrix}\eta\\ \xi\end{pmatrix}^*(x,r(\beta),r(\omega)). \tag{15.22}$$

r 由 (3.13) 定义． (15.21) 与 (15.22) 是基本的重正化群不动点方程，它应该对 ω 与 β 的所有值求解．

如 ω 在 t^F 下不变，可单独求解．黄金分割数 ρ_G 对 t^F 是二周期的，但利用对称性可变为一周期的．

$$RT\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}^*(x,\rho_G,\rho_G)=\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}^*(x,\rho_G,\rho_G). \tag{15.23}$$

这就是 §12 研究过的方程．

在次临界情况，根据 §2 的数学定理，无理转数的圆映射等价于一简单转动．很容易证明

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}^*(x,\omega)=\begin{pmatrix}x+\omega\\ x+\omega-1\end{pmatrix}$$

满足方程

$$T\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}^*(x,\omega)=\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}^*(x,t^F(\omega)),$$

这完全解决了次临界问题．

在临界情况，我们还不会求解方程 (15.21) 与 (15.22)，但可用数值实验讨论它的性质．首先我们显示 β 固定 ω 变化时解流形是光滑的．对临界标准正弦圆映射 f_w，考虑 $\rho(f_\omega)=b_F\langle I_0,I_1,\cdots,I_k,\cdots,I_N\rangle$，$N=15$，$k=6$，$\beta_k=b_F\langle 0,0,0,0,0,0\rangle$ 固定而对满足 $b\le n\le 15$ 的 I_n 取所有可能的值的情况．对上述 $2^{10}=1024$ 个 f_ω 作重正化群变换 $(T_0)^6$．

图 15-2 给出这样得到的 $\eta'(\xi(0))$ 与 $\xi'(\eta(0))$ 的关系．所示的曲线有许多间隙．我们知道，对于所有无理转数，这样的图是

一康托集. 对康托集, 可如下定义其上函数的连续性与微商. 对每一序列 $\{x_n\}$, 如 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-x|=0$ 时有 $\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)-f(x)|=0$, 则 $f(x)$ 连续. 如这时极限 $f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(x)]/(x_n-x)$ 存在, 则 $f(x)$ 可微. 数值计算表明, 图 15-2 所示的曲线是连续的, 一阶导数与二阶导数都存在而且连续.

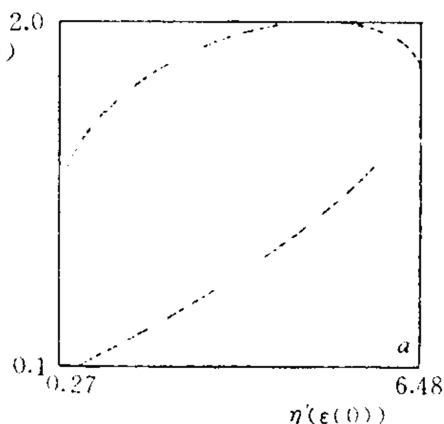


图 15-2

但是, 解流形对于 β 坐标是不连续的. 图 15-3 给出了对 $k=10$, $N=12$, $\omega_k=b_F\langle 0,0,0\rangle$ 固定, 而 $\beta=b_F\langle I_K,\cdots,I_0\rangle$ 取所有可能值得到的 $\xi_k'(\eta_k(0))$ 与 $\eta_k'(\xi_k(0))$ 的关系图. (ii) 是 (i) 的部分放大, (iii) 又是 (ii) 的部分放大, 显示了越来越细的结构. 因此人们要问: 临界重正化群不动点方程的解在多少维的空间中才可能是光滑的? 为回答这个问题, 计算图 15-3 所示图形的关联维数 ν, 发现它至少大于 1.3. 此外, 图 15-2 的维数应该为 $D_\omega\approx 0.87$. 总维数为 $\nu+D_\omega\approx 2.2$. 因此, 如假设 (15.21) 对 ω 与 β 是解析的, 则是不能求解的.

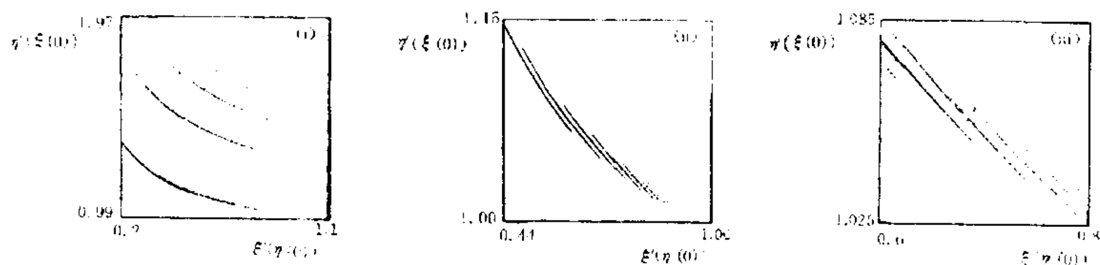


图 15-3 给定 ω 改变 β 得到的 $\xi_k'(\eta_k(0))$ 与 $\eta_k'(\xi_k(0))$ 的关系

其中 (ii) 是 (i) 的部分放大, (iii) 是 (ii) 的部分放大

于是我们只有一维光滑坐标 ω. 进一步, 我们要问当法里

地址串的头部即 β 固定时，$t_\beta(\omega)$ 作为 ω 的函数是否可以看作与 β 无关，即 $t_\beta(\omega) = t(\omega)$. 如果这样，$t(\omega)$ 可给出魔梯的标度性质. 图 15-4 给出了固定 $\beta_1 = b_f\langle 01010\rangle$ 与 $\beta_2 = b_f\langle 10100\rangle$ 改变 ω 情况下 $\eta(0,\beta_2,\omega)$ 与 $\eta(0,\beta_1,\omega)$ 的关系. 它表明曲线是可微的，但数值计算表明不存在二级微商. 据此，我们可以认为，在 β 固定情况 $t(\omega)$ 与 β 无关.

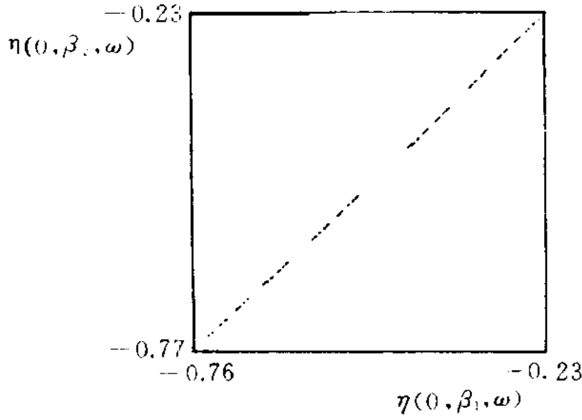


图 15-4

设 $\omega(I_0, I_1, \cdots, I_N)$ 为由 $\rho(f_\omega) = b_F\langle I_0, I_1, \cdots, I_N\rangle$ 确定的标准正弦圆映射 f_ω 的 ω 值. 如果我们视 $t(\omega)$ 中 ω 为 f_ω 的参数值，则 $t(\omega)$ 作为 ω 的函数由下式确定:

$$t(\omega(I_0, I_1, \cdots, I_N)) = \omega(I_1, I_2, \cdots, I_N). \tag{15.24}$$

这相当于将 (3.11) 作了一个坐标变换. 设 $\omega(I_0, \cdots, I_k, I_{k+1}, \cdots, I_\infty)$ 与 $\omega(I_0, \cdots, I_k, \tilde{I}_{k+1}, \cdots, \tilde{I}_\infty)$ 的地址中至少有一个元素不同，则可定义标度因子

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty} \frac{d}{d\omega} t(\omega(I_0, \cdots, I_\infty))\\ =&\frac{\omega(I_1, \cdots, I_k, I_{k+1}, \cdots, I_\infty) - \omega(I_1, \cdots, I_k, \tilde{I}_{k+1} \cdots, \tilde{I}_\infty)}{\omega(I_0, \cdots, I_k, I_{k+1}, \cdots, I_\infty) - \omega(I_0, \cdots, I_k, \tilde{I}_{k+1}, \cdots, \tilde{I}_\infty)}\\ \equiv&\delta(\omega(I_0, I_1, \cdots, I_\infty)).\end{aligned} \tag{15.25}$$

当 $k \to \infty$ 时，结果是普适的.

在次临界情况，$\rho = \omega$ 与 $t = t^F$. 根据 (3.11),

$$\delta(\rho) = \begin{cases} (1-\rho)^{-2}, & \text{当 } \rho < 1/2 \text{ 时;} \\ \rho^{-2}, & \text{当 } \rho > 1/2 \text{ 时,} \end{cases} \tag{15.26}$$

这对任意转数 ρ 都成立.

在临界情况， $t(\omega)$ 可由 $\omega(I_0,I_1,\cdots,I_N)$ 与 $\omega(I_1,I_2,\cdots,I_N)$ 得到. 图 15-5 给出了由所有地址长度小于与等于 12 得到的 $t(\omega)$ 图. (ii) 是 (i) 的在 $1-\rho_G$ 邻域的放大. 曲线看起来是连续的. 求其微商 $\dfrac{dt}{d\omega}$, 得图 15-6, 它表明 $t(\omega)$ 不是二次可微的.

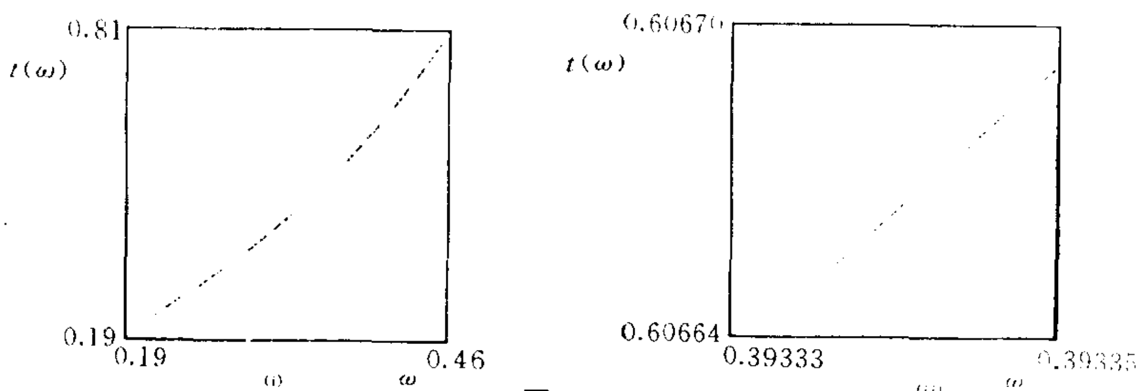


图 15-5

虽然 $t(\omega)$ 不是无限次可微的函数, 但可以用无限次可微的函数近似地描述它. 对标准正弦圆映射的数值结果表明, 接近大间隙处

$$\left.\frac{dt(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega^*}=1,\quad \frac{d^2t(\omega)}{d\omega^2}=3, \tag{15.27}$$

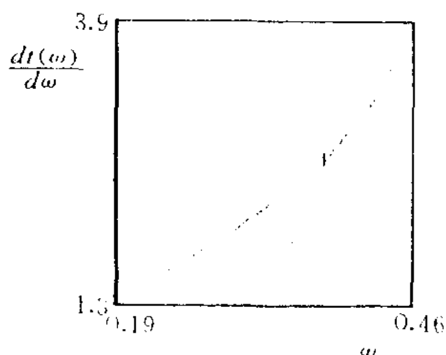


图 15-6

其中 $t(\omega^*)=\omega^*$. 二次微商的结果可能是不普适的, 但对标准正弦圆映射是准确的. 对转数为 $\rho_n=1/n$ 的序列, 可发现 $\delta_n\to 1$. 此外, 可利用已知的标度性质, 例如对黄金分割数 ρ_G 的标度律

$$-\delta(\rho_G)=\left.\frac{dt_0(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_{01}},\quad t_1t_0(\omega_{01})=\omega_{01}. \tag{15.28}$$

假设 $t(\omega)$ 为分子与分母都是 ω 一次函数的有理式, 利用 (15.27)

与 (15.28) 给出的三个关系式，可得

$$t(\omega)=\frac{0.02333+0.65925\omega}{1-1.2444\omega}. \tag{15.29}$$

这个公式给出的 $t(\omega)$ 相当于 $t_0(\omega)$, $t_1(\omega)$ 由 $t_1(\omega)=rt_0r(\omega)$ 给出. 对 $\omega(I_0,I_1,\cdots,I_N)$ 作用以 $t_{I_N}\cdots t_{I_0}$ 得 $\omega(\ )=1/2$. 利用 (15.29) 与 $t_{I_N}t_{I_{N-1}}\cdots t_{I_0}(\omega)=1/2$ 可解得一虚拟的魔梯结构 $\omega_{\text{mock}}=\omega(I_0,I_1\cdots,I_N)$, 如图 15-7 所示, 其中 $\rho=b_F\langle I_0,I_1,\cdots,I_N\rangle$.

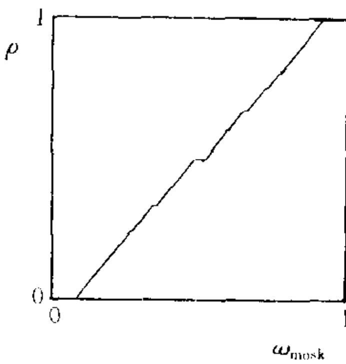


图 15-7

将有相同转数的 ω_{mock} 为横坐标与正弦圆映射的 $\omega_{\sin}$ 为纵坐标作图, 可得一看似光滑的曲线, 这表明两者有近似相同的标度性质. (15.29) 是由黄金分割数的标度值得到的, 自然精确地给出了 $\delta(\rho_G)$. 对于 $\rho=\sqrt{3}-1$ 与 $\sqrt{2}-1$, (15.29) 给出 $\delta=6.5944$ 与 17.065. 这与直接数值计算得到的数值 6.79925 与 17.66906 的差别为 1/30.

由上述讨论可见，本节的方法适用于二次无理数与基于法里树的全局结构. 对于非二次无理数, 这种方法仍不解决问题. 事实上, 例如对三次无理数, 数值实验表明不存在临界标度律, §32 与文献 [48] 对这个问题作了分析.

第 4 章

超临界圆映射的分岔行为与标度律

§16 超临界圆映射的一般分岔行为

超临界圆映射有复杂的分岔行为，其完全的分岔图由参数空间与相空间一起组成的三维 (ω,k,x) 空间来描述．由于混沌轨道有复杂的结构，许多轨道画在一起的三维图将是一片糊涂．因此我们只能研究其不同的二维剖面．图 16-1 给出了标准圆映射参数空间的分岔图[24]．实线表示阿诺尔德舌头的边界，虚线为锁频区的边界，点

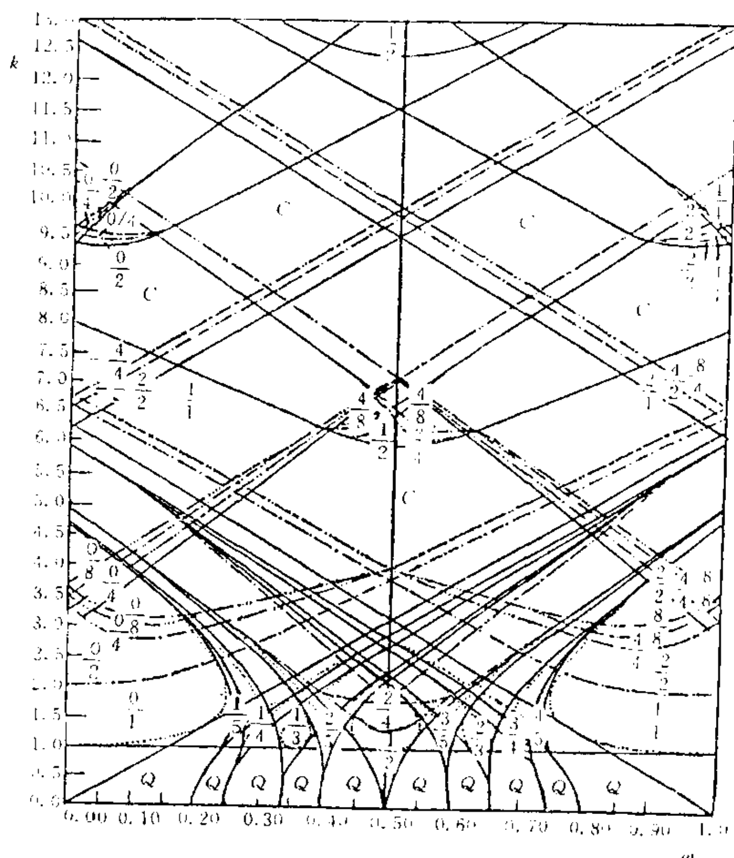


图 16-1

划线为倍周期分岔的边界. 随 k 值的增加产生的新轨道边界也用实线表示. Q 表准周期区, C 表混沌区. 在 Q 、C 区内还有无限多周期窗口, 在图中不能标出. 沿着参数空间某一给定的曲线, 我们可以有单参数的分岔行为. 在任一 p/q 阿诺尔德舌头的大 k 值处的 p/q 轨道稳定区, 将 k 值继续增加, 将有单峰映射的分岔行为. 沿着以 $g^n(x) = f_{\omega,k}^{F_{n+1}}(x) - F_n$ 的拐点为 $(x, g^n(x))$ 面上 $g^n(x)$ 与对角线的交点所定义的 (ω, k) 曲线, 沿 k 的增加方向, 将有与反对称立方映射类似的分岔行为. 作为后者的一个例子, 我们考察 $(\omega, k) = (0, k)$ 线上的分岔行为[25].

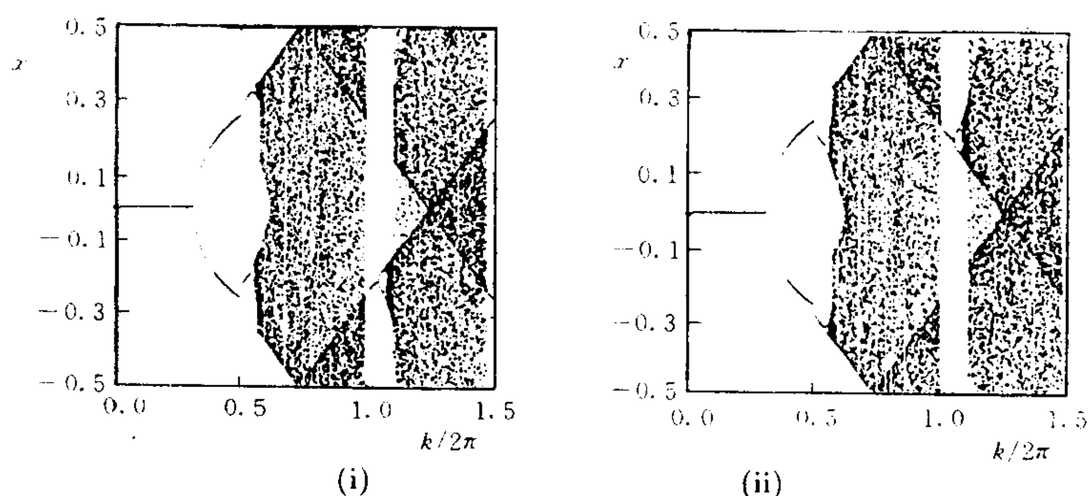


图 16-2

图 16-2 给出了参数空间 $(0, k)$ 线上的分岔图. 图 16-2(i) 与图 16-2(ii) 的初值分别为 $x_0 = 0.25$ 与 $x_0 = 0.75$. 对于小的 k 值, $x = 0$ 是稳定不动点. 在 $k = 2$ 处发生倍周期分岔. 在 $k = \pi$ 处, 由不同初值出发的倍周期轨道分成两个不同的吸引子. 接着的分岔可很好地由费根鲍姆倍周期序列来描述. 在 $k_4 = 2\pi(0.25 + 1/2\pi^2)^{1/2} \approx 3.445$ 处出现四周期轨道, $k_8 = 3.512$ 处出现 8 周期轨道. 用费根鲍姆常数 $\delta = 4.669$ 与差 $k_8 - k_4 = 0.0672$, 可算出由倍周期分岔到混沌过渡的临界点为

$k_\infty = 3.445 + 0.0672\sum_{n=0}^{\infty} 4.669^{-n} = 3.531$. 在 $k = k_d \equiv 4.603$ 处, $f(x)$ 的极值点映射为其不稳定不动点. $k < k_d$ 时 $f(x)$ 的迭代限制在 $(0,1)$ 区间, 其分岔行为与反对称立方映射相同, 其中有无限多周期窗口. $k = k_d$ 时迭代点充满整个 $(0,1)$ 区间. $k > k_d$ 时迭代点将越出 $(0,1)$ 区间, 发生扩散, 我们将在下一节讨论这种扩散现象. 不过, 在图 16-2 中, 由于取了同余, 所有点仍画在 $(0,1)$ 区间内. 随着 k 值的继续增大, 可以看到在偶数倍 π 与奇数倍 π 处有明显的周期窗口. 由图 16-1 可见, $k = 2n\pi$ 处的窗口是由 $\pm n/1$ 阿诺尔德舌头延伸过来的, 不同初值有不同的吸引子, 有双稳态. 在 $k = (2n+1)\pi$ 处则有新生二周期轨道

$$P_{-(n+1)}m_0 \text{ 与 } N_{-n}m_0, \text{ 或 } P_{n+1}M_0 \text{ 与 } N_nM_0.$$

在 $\omega = 0$ 轴上, 它们是锁频的, 可表为 $M_{-n}m_0$ 或 m_nM_0, 这两个表示完全等价.

当 $\omega \neq 0$ 时, 超临界圆映射的行为在定性上是与 $\omega = 0$ 的情况相似的, 周期轨道与混沌轨道出现的次序随着 ω 而变化. 对不同的初始条件, 可能出现不同的周期轨道, 或出现周期轨道与混沌轨道双稳态, 或出现都是混沌吸引子的双稳态. 图 16-3 给出了 $\omega = 0.45$ 时的 (k, x) 分岔图, 图 16-3(i) 与图 16-3(ii) 的初值分别为 $x_0 = 0.75$ 与 $x_0 = 0.25$. 由图 16-1 可见, 图 16-3(i) 中 $2\pi k \approx 0.55$ 时的二周期来自 0/1 舌头的倍周期轨道, 图 16-3(ii) 中的则来自 1/1 舌头的轨道. 这两条轨道在 $\omega = 0.45$ 处都有完全的单峰映射的分岔图. 不同的是, 图 16-3(i) 初值为 $x_0 = 0.75$ 的轨道最后发生危机时, 初值为 $x_0 = 0.25$ 的轨道仍是稳定的, 双稳态坍缩为单稳态. 而图 16-3(ii) 发生危机时, 变为充满整个

区间的混沌态. 从图 16-1 也能估计到这些结果, 不过 (k,x) 分岔图给出了更清晰且直观的图象.

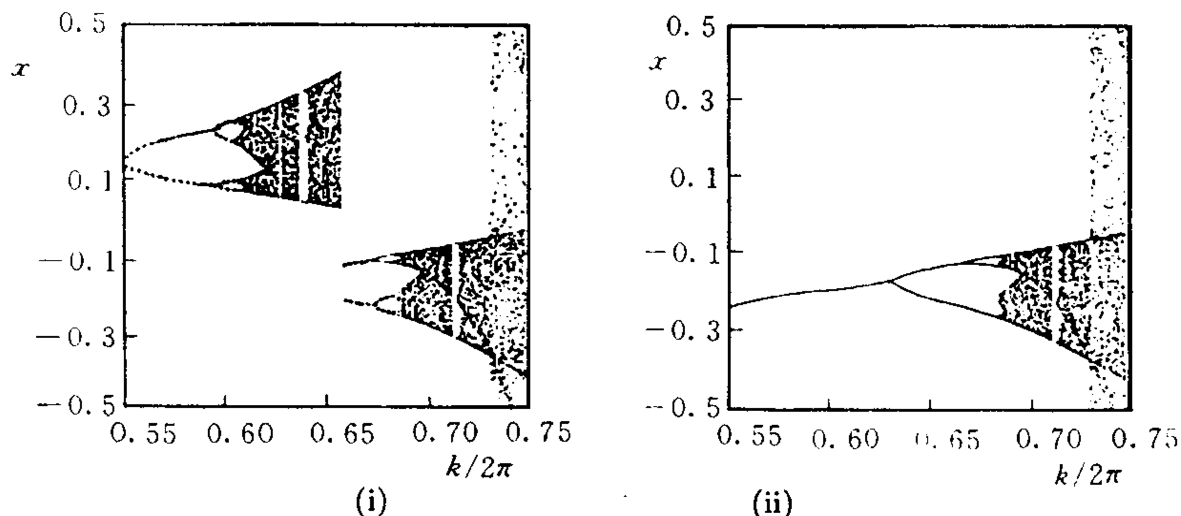


图 16-3

§17 $\omega=0$ 超临界圆映射所描述的扩散行为

§16 提到, 在 $\omega=0$, $k\geq k_d\approx 4.603$ 处会出现扩散运动. 在临界点 $(\omega=0, k=k_d)$ 的邻域, 这种扩散也具有普适的标度律. 因此, 在分析超临界圆映射的其他标度性之前, 先介绍与扩散的出现有关的标度律 [26].

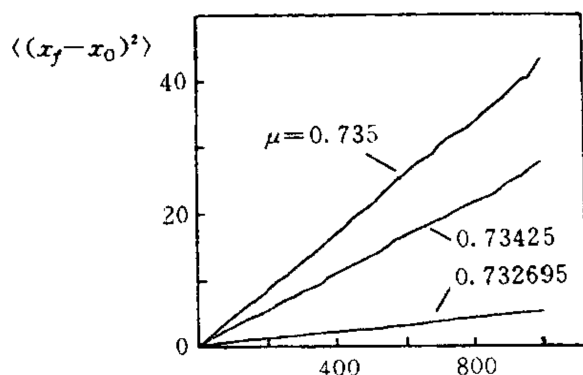


图 17-1

考虑映射

$$x_{n+1}=x_n-\mu\sin(2\pi x_n). \tag{17.1}$$

在 $\mu > \mu_G = 0.73264413$ 时，发生扩散运动．图 17-1 给出了对 $\langle (x_n - x_0)^2 \rangle$ 所作的数值计算的结果．平均是对 $-1/2 < x_0 < 1/2$ 间的 2000 个值作的．正如所期望的，它与 n 的关系是一直线，其斜率给出 $2D$, D 为扩散系数．在 μ_c 的邻域，对于小的噪声 σ, D 与 $(\mu - \mu_c)$ 及 σ 的关系具有普适性，因此下面将与噪声的影响一起讨论．

考虑更加普遍的映射

$$x_{n+1} = f(x_n) + \sigma\xi_n, \tag{17.2}$$

其中 ξ_n 为高斯白噪声， $\sigma \ll 1$, $f(x)$ 是 x 的奇函数， $f(x) - x$ 是周期函数，即

$$f(-x) = -f(x), \quad f(x+n) = n + f(x). \tag{17.3a}$$

$f(x)$ 在每一周期内有相对的极大，位于 $n + x_c$, $-1/2 < x_c < 0$. 在 x_c 的邻域，

$$f(x) = a(\mu) - b(\mu)|x - x_c|^\alpha. \tag{17.3b}$$

$\sigma \neq 0$ 时附加假设

$$\left|\frac{1}{2} - f(x)\right| \ll 1 \to |x - x_c| \ll 1. \tag{17.3c}$$

设 $\rho_n(x)dx$ 为当初值 x_0 在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 内而 n 时在 $(x, x+dx)$ 区间发现迭代点的概率，则由概率守恒得

$$\rho_{n+1}(y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(x)v(\xi)\delta[y - f(x) - \sigma\xi]dxd\xi. \tag{17.4}$$

其中 $v(\xi)$ 为高斯分布．定义初始在 0 元胞而 n 时在 l 元胞内发现迭代点的概率

$$P_n(l) = \int_{l-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \rho_n(y)dy. \tag{17.5}$$

把 (17.4) 代入 (17.5), 完成对 y 的积分，得

$$P_{n+1}(l) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{r(x)}^{s(x)} \rho_n(x) v(\xi) d\xi dx, \tag{17.6}$$

其中 $r(x) = [l - 1/2 - f(x)]/\sigma$, $s(x) = [l + 1/2 - f(x)]/\sigma$. 现设 $|\mu - \mu_c| \ll \mu_c$ 并且 $\sigma \ll 1$, 忽略 $\sigma \exp(-1/2\sigma^2)$ 项，可完成对 ξ 的积分:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(l) =& P_n(l) - \frac{1}{2} \int_{l-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \rho_n(x) \{\mathrm{erfc}\,[-2^{1/2} r(x)] \\ & + \mathrm{erfc}[-2^{-1/2} s(x)]\} dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{l+\frac{1}{2}}^{l+\frac{3}{2}} \rho_n(x) \mathrm{erfc}\,[-2^{-1/2} s(x)] dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{l-\frac{3}{2}}^{l-\frac{1}{2}} \rho_n(x) \mathrm{erfc}\,[-2^{-1/2} r(x)] dx. \end{aligned} \tag{17.7}$$

对于长时间行为， $\rho_n(x)/P_n(l)$ 对 $l - \frac{1}{2} \le x \le l + \frac{1}{2}$ 趋向一与 n 、 l 无关的分布，记其为 $\rho(x)$, (17.7) 变为

$$\begin{aligned} P_{n+1}(l) - P_n(l) =& -\frac{1}{2} P_n(l) \int_{l-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \rho(x) \{\mathrm{erfc}[-2^{-1/2} r(x)] \\ & + \mathrm{erfc}[-2^{-1/2} s(x)]\} dx \\ & + \frac{1}{2} P_n(l+1) \int_{l+\frac{1}{2}}^{l+\frac{3}{2}} \rho(x) \mathrm{erfc}[-2^{-1/2} s(x)] dx \\ & + \frac{1}{2} P_n(l-1) \int_{l-\frac{3}{2}}^{l-\frac{1}{2}} \rho(x) \mathrm{erfc}[-2^{-1/2} r(x)] dx. \end{aligned} \tag{17.8}$$

对 l 作傅里叶变换，利用对称性质 (17.3a), 可求得 (17.8) 的解

$$P_n(l) = N^{-1}\sum_k^N \Big\{1-(1-\cos k)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\rho(x) \\ \operatorname{erfc}\Big(2^{-1/2}\Big[\frac{1}{2}-f(x)\Big]/\sigma\Big)dx\Big\}^n e^{ikl}. \tag{17.9}$$

$\sum$ 为对第一布里渊区的 N 个 k 值求和. 用 (17.9) 可以计算长时间的 $\langle(x_n-x_0)^2\rangle$, 得到

$$D=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\rho(x)\operatorname{erfc}\Big\{2^{-1/2}\Big[\frac{1}{2}-f(x)\Big]/\sigma\Big\}dx. \tag{17.10}$$

在 (μ_c,x_c) 邻域，可取 $a(\mu)=\frac{1}{2}+a'(\mu-\mu_c)$, $b=b(\mu_c)=$ 常数. 利用 (17.3b), 并忽略 $[\sigma^2+\sigma(\mu-\mu_c)]^{1/\alpha}$ 项，得

$$D=\sigma^{1/\alpha}d((\mu-\mu_c)/\sigma), \tag{17.11}$$

$$d(z)=\alpha^{-1}(\sqrt{2}/b)^{1/\alpha}\rho(x_c)\int_{-2^{-\frac{1}{2}}a'z}^{\infty}(u+ \\ 2^{-\frac{1}{2}}a'z)^{1+\frac{1}{\alpha}}\operatorname{erfc}(u)du. \tag{17.12}$$

d 是普适的标度函数，它只与 $(\mu-\mu_c)/\sigma$ 有关. 这与磁场中的相变类似， $\mu-\mu_c$ 对应于温度， σ 对应于磁场. 在 $\mu=\mu_c$ 处，只有噪声引起扩散 $D=\sigma^{1/\alpha}d(0)$. 在无噪声情况， (17.10) 变为

$$D=2\rho(x_c)(a'/b)^{1/\alpha}(\mu-\mu_c)^{1/\alpha}+O(\Delta\mu^{3/\alpha}), \tag{17.13}$$

所以 σ 与 $\Delta\mu$ 的临界指数都是 $1/\alpha$.

为了显示 d 函数的普适性，图 17-2 给出了对于映射

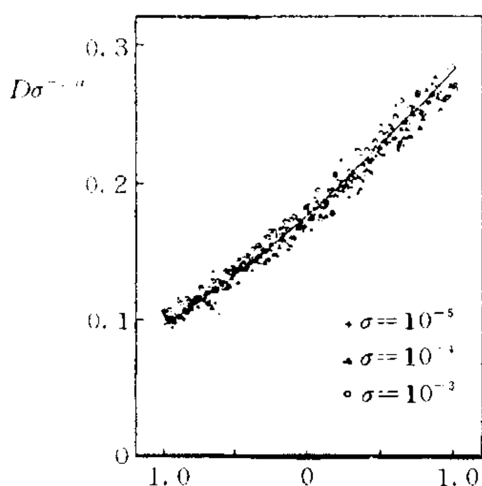


图 17-2

$$f(x)=3^{3/2}\mu\left(2x^3-\frac{x}{2}\right)$$

所作的数值实验的结果. 纵、横坐标分别用标度变量 $D\sigma^{-1/\alpha}$ 与 $(\mu-\mu_c)/\sigma$. 图中给出了三个 σ 值与 $(-1,1)$ 间 100 个 $\Delta\mu/\sigma$ 值所得的结果, 它们都很好地落在由 (17.12) 给出的曲线的附近. 在利用 (17.12) 作计算时没有任何可调参数.

§18 接近临界线处阿诺尔德舌头的相似性

在临界线之上, 每个阿诺尔德舌头都有复杂而相似的结构. 自然期望最接近临界线的结构具有与临界线有关的标度律. 与其有关的量为: 例如, 发生倍周期分岔的最低 k 值, 锁模区边界与阿诺尔德舌头边界的交点等. 数值实验发现, 不同的转数序列有不同的标度律 [27]. 其中最重要的是趋向菲波那契数的 F_i/F_{i+1} 序列的标度律.

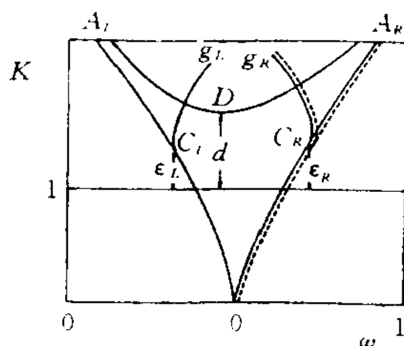


图 18-1

参考如图 18-1 所示的阿诺尔德舌头. 其临界线上的舌头宽度 $\Delta(F_i/F_{i+1})$ 应满足与 (10.13) 相同的标度律

$$\Delta(F_i/F_{i+1})/\Delta(F_{i+1}/F_{i+2})\to\rho_G^{-y},\quad y=2.1644, \tag{18.1}$$

所以

$$\Delta(F_i/F_{i+1}) \propto (\rho_G^{-y})^i \propto F_{i+1}^{-y}. \tag{18.2}$$

当 k 偏离临界值 $k=1$ 而仍在其邻域时，§10 中定义了一个组合变量 $(k-1)F_{i+1}^z$，数值实验表明：$\alpha_i(k)$ 与 $\delta_i(k)$ 等都只是这个组合变量的函数. 从重正化群的观点，如把 $\Delta k = k-1$ 也作为重正化群的不动点的邻域，我们自然可以期望 $k>1$ 与 $k<1$ 时有相同的邻域性质. 因此我们有

$$d_i \propto (\varepsilon_L)_i \propto (\varepsilon_R)_i \propto F_{i+1}^{-z}, \quad z = 1.0537. \tag{18.3}$$

文献 [28] 和 [29] 等的数值实验完全证实了 (18.2) 与 (18.3). 由于 (18.3) 式，看来从数值计算得到的比值 $\varepsilon_{\text{large}}/\varepsilon_{\text{small}} = 1.018$ 与 $d/\varepsilon_{\text{large}} = 2.19$ 也是普适的. 可以期望，所有二次无理数具有相同的标度律，只不过 F_{i+1} 与 y, z 要换成与所涉及的无理数有关的量.

很有意思的是, 数值计算发现, 对于趋向有理转数的序列, ε 与 d 并不趋向于 0. 对于 $\rho_N = 1/N, 1/(N+1/M), N = 1,2,3,\cdots$ 等序列，数值计算都发现 $d, \varepsilon_L, \varepsilon_R$ 与 N 的关系是

$$\Delta k_N \approx a + b/N^2; \tag{18.4}$$

而对于小的 $M = 1,\cdots,b$, 发现

$$a \sim a_0/M, \quad b \sim b_0 M. \tag{18.5}$$

这是否意味着 $M,N \to \infty$ 时 $a \to 0$？对 $\rho_n = 1/(N+1/N)$ 序列所作的计算表明，$d, \varepsilon_L, \varepsilon_R$ 仍可由 (18.4) 描述，只是系数有所不同. 甚至对 $\rho_N = 1/(N+1/(N+1/N))$ 序列，看来 Δk_N 也有不为 0 的极限. 因此，自然推测，所有具有有限连分式的转

数，在其元素值趋向无穷时，d 与 ε 是有限的，而相应的 $k=1$ 线上的阿诺尔德舌头的宽度都趋于 0.

如何理解这些结果呢？上述结果是利用函数 $g(x)=f^{(q)}(x)-p$ 得出的. 以 ε 的计算为例，它要求 $g(x)$ 把最接近拐点的具有极大 (小) 值的点 x_m 映射为 $g(x)$ 的最接近拐点的不稳定不动点 x_u. 对立方拐点，在 $x=0$ 附近

$$f(x)\approx\omega+ax^3-(k-1)x, \tag{18.6}$$

对 $k>1$ 有两个极值点 $x_m\approx\pm\sqrt{k-1}$. 相应地，不动点也是同一量级 $x_u\approx\sqrt{k-1}$. $g(x)$ 的拐点邻域的局部图形是 (18.6) 的映射，有相同的行为. 对于二次无理数，$x_u\sim\alpha^{-i}$ 即 $\varepsilon_i\sim\alpha^{-2i}$. 但是对于趋向有理数 p/q 的序列 p_i/q_i, 情况有所不同. 虽然 $i\to\infty$ 时 $q_i\to\infty$, 但轨道并不覆盖整个圆，而是集中在 p/q 轨道的 q 个鞍点的邻域. 因此，最接近 $x=0$ 点的 $g(x)$ 的不动点与 $x=0$ 有有限的距离，$\varepsilon_i(i\to\infty)$ 也有如 (18.4) 所表示的有限值.

虽然对不同的序列有不同的标度律，但如 §13 讨论 $k=1$ 情况一样，我们可以研究对所有序列的平均标度律. 定义 $d(p/q)$ 为 p/q 舌头中倍周期分岔双曲临界线最低点与 $k=1$ 轴上超稳定点之间的距离. 计算发现

$$\langle d(p/q)\rangle_p\sim q^{-\sigma},\qquad \sigma=0.74\pm0.06; \tag{18.7}$$

$$\langle\sqrt{d(p/q)}\rangle_p\sim q^{-\sigma_s},\quad \sigma_s=0.41\pm0.02. \tag{18.8}$$

比较 (18.3) 与 (18.7)、(18.8), 可见 $k=1$ 至倍周期分岔临界线最低点的对 q 周期平均的距离的标度指数与非波那契序列的显然不同. 但其方根平均 (18.8) 的标度指数，在数值计算误差范围内与 $k=1$ 线上坐标的标度指数 (13.12) 相等，$\sigma_s=\alpha$. 此外，

$d(p/q)$ 绕 $\langle d(p/q)\rangle_p$ 的涨落比 § 13 中 $d_1(p/q)$ 绕 $d_1(q)$ 的涨落大，因此 σ 与 σ_s 的误差也比 α 的大，而且 $\sigma \leq 2\sigma_s$.

§ 19 倍周期分岔的矢量标度律

§ 18 研究了不同的阿诺尔德舌头之间由 $k=1$ 至倍周期分岔双曲线最低点之间距离的标度律. 随 k 的继续增加，我们将遇到倍周期分岔序列. 我们在 § 9 中已经看到，对于像标准圆映射这样的双临界点双参数的映射，倍周期序列形成二元树. 每一阿诺尔德舌头都有其相应的二元树，每一二元树本身都有其内部相同的标度律，本节研究这种内部的标度律 [14].

在二维参数平面上，倍周期分岔临界点变成临界线，这些线终止于三临界点. 三临界点集是一康托集，它们是无限二元树的端点. 二元树上的标度律可以用参数平面上的二种曲线来描述，它们是超稳定线与超稳定轨道片段线. 超稳定轨道片段是通过两个极值点的轨道的一部分，两个适当的超稳定轨道片段的组合可生成一双超稳定轨道. 片段线系统包含一嵌入的二元树，它清楚地显示出参数平面上的自然标度方向. 不同的方向有不同的收敛率，现在有两个收敛率 δ_1 与 δ_2, 因此称为矢量标度律.

以 M 与 m 分别表示圆映射 f 的极大点与极小点；超稳定线 S_j 与 s_l 的定义是：

$$S_j: \quad f^{(j)}(M;\omega,k)=M, \tag{19.1}$$

$$s_l: \quad f^{(l)}(m;\omega,k)=m; \tag{19.2}$$

方程的解 $k=k(\omega)$. 超稳定轨道片段线 M_j 与 m_l 是满足下面方程的解:

$$M_j: \quad f^{(j)}(m;\omega,k)=M, \quad j \text{ 为奇数}; \tag{19.3}$$

$$m_l: \quad f^{(l)}(M;\omega,k)=m, \quad l \text{ 为奇数}. \tag{19.4}$$

当 M_j 与 m_l 相交时, 如 $j+l=2^n$, 则它们确定了双超稳轨道的参数, 这条轨道通过 M 与 m. (19.1)~(19.4) 的定义适用于 0/1 阿诺尔德舌头, 对其他舌头的倍周期分岔问题, 容易作相应的推广.

图 19-1 给出了标准圆映射的能构成 $j+l=2^n$ 的 $\bar{M}_j$ 与 $\bar{m}_k$ 线. 映射参数 k 取负号. M_j 与 m_l 的交点给出了双超稳轨道点, 镶嵌在其中的二元树连接双超稳定点. 沿着 M_1 的双超稳轨道序列 $M_1\cap m_{2^n-1}$ 终止于三临界点 $T(M_1)$, 沿着 m_3 的双超稳轨道序列 $m_3\cap M_{2^n-3}$ 终止于三临界点 $T(m_3)$ 等等. 双超稳轨道具有四次极值, 具有四次临界点的单峰映射的倍周期分岔的参数收敛率为 $\delta_1=7.28469$, 上述序列沿着 M_1 或 m_3 正是以这个收敛率趋向 $T(M_1)$ 或 $T(m_3)$ 的. 沿着 k 增加的方向, 每一交点处只有左 L 右 R 两个分支. $M_1\cap m_{2^n-1}$ 可表为 R R···R. 以后可知, R R···RL 端点与 M_1 的距离以 $\delta_2=2.85713$ 标度趋向 $T(M_1)$. $\delta_2=\alpha_4^2$,

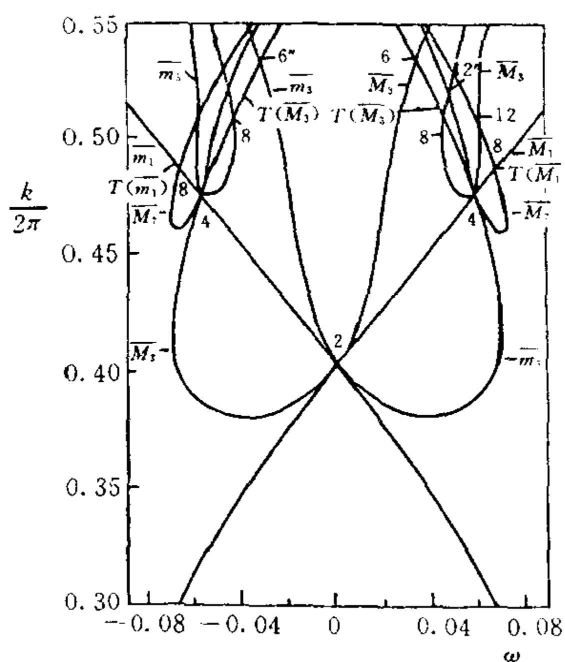


图 19-1

$\alpha_4 = -1.6903$ 是四次单峰映射的坐标标度常数. 当然, 如果沿着 (ω, k) 平面的任一固定方向, 例如 ω 或 k 方向趋向费根鲍姆临界线, 我们仍有通常的二次单峰映射的收敛率 $\delta = 4.6692\cdots$.

现在我们分析三临界点 T 的邻域的超稳定线系的标度性质. 图 19-2 给出了 M_1 及与其相联系的超稳定线. 沿着任一超稳定轨道片段线有两组超稳定线与标度性有关, 一组是与主干 S 相交的, 即图中的 n, 另一组始于与主干相接并朝向一边, 即图中的 u. n 在 S 上以收敛率 δ_1 趋向通过三临界点的费根鲍姆线. 在每一分支 b 上, u 也以 δ_1 的收敛率趋向其相应的费根鲍姆线. 每一分支 b 都可以作为与 S 相似的主干有其次级的分支, 如此等等, 以至无穷. 这正是我们在 §9 中分析过的图象. 每一 b 上的 u 集的宽度, 在趋向 T 时以 δ_1 标度. 而 u 集的深度, 如图中空心圆点所示, 在趋向 T 时以 δ_2 标度.

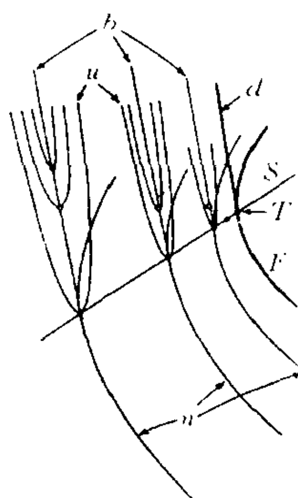
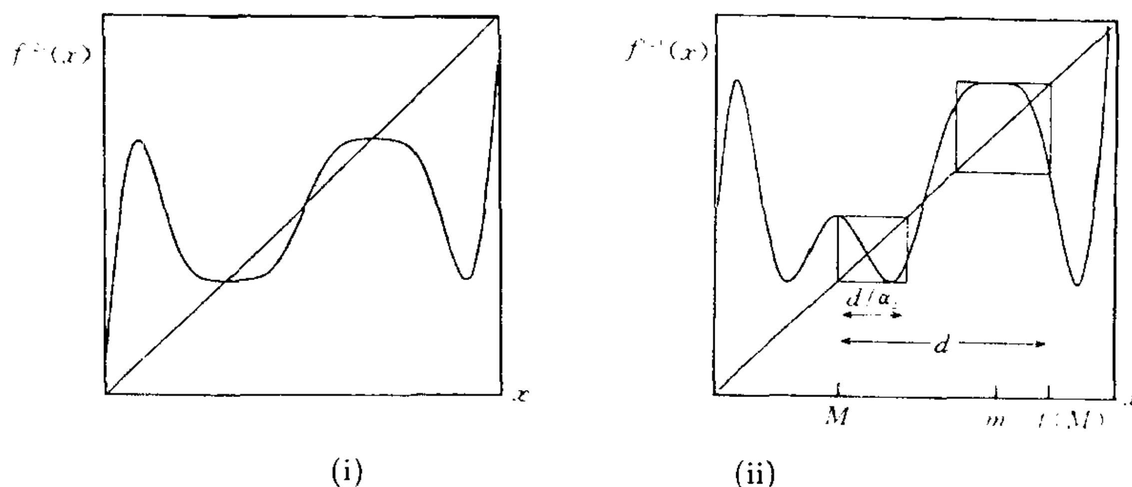


图 19-2



(i) (ii)

图 19-3

参数平面的标度性与相空间轨道的标度性有关, 它们在任

一三临界点处都变成普适的．现先以沿 M_1 趋向 $T(M_1)$ 为例来讨论．图 19-3 给出了 M_1 上 $M_1 \cap m_1$ 点与 $T(M_1)$ 点的标准圆映射的 $f^{(2)}(x)$ 图．在 $M_1 \cap m_1$ 处，$f^{(2)}(x)$ 在 M 与 m 都有四次极值．图 19-3(ii) 给出了 $T(M_1)$ 处的 $f^{(2)}(x)$ 图．这时，在 m 处有四次极大，而在 M 处只有二次极值．这是因为 $T(M_1) = M_1 \cap m_{2^\infty - 1}$，根据 (19.3) 与 (19.4), m 被 f 映射为 M, 所以 $f^{(2)}(x)$ 在 m 有四次极大，而 $f(M)$ 的邻域只被 f 作线性映射，所以 $f^{(2)}(x)$ 在 M 只有二次极值． m 峰的结构以 α_4 标度，M 的结构以 $\alpha_2 = \alpha_4^2$ 标度．

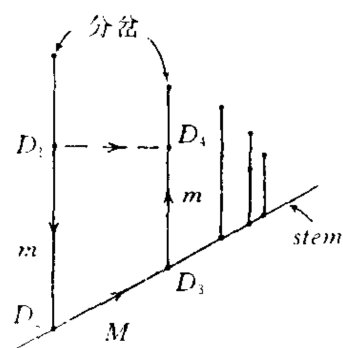


图 19-4

我们也可以把上述讨论推广到旁支上轨道对的情况，例如图 19-4 所示的双超稳定轨道序列

$$D_1 \xrightarrow{m} D_2 \xrightarrow{M} D_3 \xrightarrow{m} D_4,$$

它等价于 $D_1 \to D_4$．据 (19.3) 与 (19.4) 可见，每一过渡的重新标度如下：

$$D_1 \xrightarrow{m} D_2: \text{ 在 } m \text{ 为 } \alpha_4^{-2}, \text{ 在 } M \text{ 为 } \alpha_4^{-1} \text{ (周期减半)}$$

$$D_2 \xrightarrow{M} D_3: \text{ 在 } m \text{ 为 } \alpha_4, \text{ 在 } M \text{ 为 } \alpha_4^2 \text{ (倍周期)}$$

$$D_3 \xrightarrow{m} D_4: \text{ 在 } m \text{ 为 } \alpha_4^2, \text{ 在 } M \text{ 为 } \alpha_4 \text{ (倍周期)}$$

$D_1 \xrightarrow{m} D_2$ 逆倍周期方向，周期减半，其标度情况是 $D_2 \xrightarrow{m} D_1$ 标度之逆．把相应的因子相乘，得

$$D_1 \to D_4 \qquad \text{在 } m \text{ 为 } \alpha_4, \text{ 在 } M \text{ 为 } \alpha_4^2.$$

它与沿 M 主干的重新标度相同，旁支的效应相互抵消．

上述讨论可以推广到任一主干 M_j 或 m_l: 在 M_j 上, $f^{(j+1)}(x)$ 在 m 上是四次的, 而由 m 到 M 的前 j 个点上都是二次的; 在 m 上则反之. 例如, 沿着 m_3, $f^{(4)}(x)$ 在 M 处为四次的, 而在 $f(M)$, $f^{(2)}(M)$, $f^{(3)}(M)$ 处都是二次的. 因此, 在 $T(m_3)$ 处 M 点标度因子为 α_4, $f(M)$ 、 $f^{(2)}(M)$ 与 $f^{(3)}(M)$ 等于 m 处的标度因子都是 α_4^2. 在重正化群的处理中, 我们要引入普适函数, 现在需要两个函数. 在 $T(m_3)$ 点, $f^{(k+1)}(x)$ 在 M 点是四次的, 由 q_4 描述, 在 $f(M),\cdots,f^{(k)}(M)$ 点都是二次的, 由 q_2 描述. $q_2(x)$ 与 $q_4(x)$ 的图形与图 19-3(ii) 中相应小方框中的图形相似.

在三临界点处, q_2 与 q_4 都满足费根鲍姆重正化群不动点方程

$$q_j=\alpha_j q_j(q_j(x/\alpha_j)),\quad j=2\text{ 或 }4. \tag{19.5}$$

现证 q_2 与 q_4 之间存在幂律共轭关系

$$q_2(x)=[q_4(\sqrt{x})]^2. \tag{19.6}$$

仍以 $T(m_3)$ 为例. 在 M 点的邻域 $x\ll 1$, 有

$$f^{(2^n)}(M+x)\approx M+q_4(x). \tag{19.7}$$

因为轨道还通过 m, 所以 $q_4(x)\approx a+bx^4+\cdots$ 有四次极值. 对于 $f(M)$ 点的邻域 $f(M)+x$, 利用 (19.7) 可得

$$\begin{aligned}f^{(2^n)}(f(M)+x)\approx&f^{(2^n+1)}(M+\sqrt{2x/f''(M)}\ )\\\approx&f(M+q_4(\sqrt{2x/f''(M)}))\\\approx&f(M)+\frac{1}{2}f''(M)[q_4(\sqrt{2x/f''(M)}\ )]^2\\\approx&f(M)+q_2(x).\end{aligned} \tag{19.8}$$

所以 $q_2(x)=\left[\sqrt{\frac{f''(M)}{2}}q_4\left(\sqrt{\frac{2}{f''(M)}}\sqrt{x}\right)\right]^2$. 除一标度常数外，即 (19.6). (19.7) 与 (19.8) 中的 q_j 都包含某一与 n 有关的标度常数，这不影响幂律共轭性 (19.6). $q_2(x)$ 有二次极值. 依此类推，对 $T(m_3)$ 点， $f^{(2)}(M)$ 与 $f^{(3)}(M)$ 处的标度函数也都是 $q_2(x)$. 正如图 19-3(ii) 所显示的，因为 $q_4(x)$ 将 $x=0$ 映射为 q_4 极大，(19.6) 表明 $q_2(x)$ 映射其极小至极大. 将 (19.6) 代入 (19.5), 可见

$$\alpha_2=\alpha_4^2. \tag{19.9}$$

将 (19.5) 在其不动点解的邻域线性化，得线性化算符

$$L_jh=\alpha_j\{q_j'(q_j(x/\alpha_j))h(x/\alpha_j)+h(q_j(x/\alpha_j))\},\quad j=2 \text{ 或 } 4. \tag{19.10}$$

可以证明，对于不动点函数存在幂律共轭关系的情况，线性化算符 L_2 与 L_4 具有相同的谱. 设 L_2 有本征值为 λ 的本征函数 h,

$$L_2h=\lambda h, \tag{19.11}$$

则易证算符 H

$$Hh\equiv[q_2(x^2)]^{-1/2}h(x^2) \tag{19.12}$$

满足恒等式

$$L_4H=HL_2. \tag{19.13}$$

因此 (19.12) 是 L_4 的本征值为 λ 的本征函数,

$$L_4Hh=\lambda Hh. \tag{19.14}$$

幂律共轭 (19.6) 是可逆的，谱理论对于 L_2 与 L_4 是对称的. L_2 与 L_4 有共同相关本征值 $\delta_1=7.28469$.

费根鲍姆在讨论单峰映射倍周期分岔重正化群方程时曾指出，

$$h_j^{(k)}(x) = (q_j)^k - x^k q_j' \tag{19.15}$$

是 L_j 的本征值为 α_j^{1-k} 的本征函数，

$$L_j h_j^{(k)} = \alpha_j^{1-k} h_j^{(k)}. \tag{19.16}$$

直接把 (19.15) 代入 (19.10)，就可证明 (19.16). $h_j^{(k)}$ 相应于 q_j 的拓扑共轭变换 $x \to x + cx^k$ 自由度. $k > 1$ 的本征值小于 1，是不相关的. $k = 1$ 属于边缘本征值，$h_j^{(1)}$ 相应于无限小标度变换，通常它由于原点的选择而不必考虑. 但是，现在由于幂律共轭关系 (19.16)，L_2 的平移本征矢对应于 L_4 的 $k = -1$ 本征矢. 本征值为 $\delta_2 = \alpha_2 = \alpha_4^2$. L_2 的本征矢为

$$h_2^{(0)}(x) = 1 - q_2'(x). \tag{19.17}$$

L_4 的本征矢为

$$\begin{aligned} h_4^{(-1)}(x) =& H(1 - q_2'(x)) = [q_2(x^2)]^{-1/2}[1 - q_2'(x^2)] \\ =& (q_4(x))^{-1} - x^1 q_4'(x). \end{aligned} \tag{19.18}$$

$h_2^{(0)}(x)$ 是光滑的，$h_4^{(-1)}(x)$ 则有简单奇点.

$q_2(x)$ 与 $q_4(x)$ 描述 $f^{(2^n)}(x)$ 函数在对角线邻域的不同极值邻域的函数形状. 沿着各级干线，δ_1 微扰保持 $q_4(x)$ 的四次行为与 $q_2(x)$ 的将其极小映射为极大的行为. 因此 δ_1 描述沿干线的分岔点的标度性质. δ_2 微扰对于 $q_2(x)$ 是一无限小平移，它应保持 $q_2(x)$ 的形状，例如两极值之间的标度性质. 对于 $q_4(x)$，$h_4^{(-1)}(x)$ 在原点有二次行为，在 $q_4(x)$ 的零点有奇异性. 其在原

点的行为表明偏离了主干，因而 δ_2 描述旁支深度沿主干变化的标度性质．这些结论正与前面对图 19-2 的讨论一致．

§20 菲波那契序列的阿诺尔德舌头中分岔的相似性

在 §18 中，我们研究了不同阿诺尔德舌头之间第一次倍周期分岔的分岔点与 $k=1$ 线之间的距离的标度律．在 §19 中又研究了任一阿诺尔德舌头中倍周期分岔序列的标度律．因此，我们自然期望某些阿诺尔德舌头序列中存在着分岔图形的相似性．首先要考虑的序列自然是菲波那契序列 F_i/F_{i+1} 中分岔图的相似性[30]．

如 §12 中那样，定义

$$g_i(x,\omega,k)=f_{\omega,k}^{(F_{i+1})}(x)-F_i, \tag{20.1}$$

考虑其沿 m_1 超稳定轨道片段线

$$g_i(M,\omega,k)=m \tag{20.2}$$

的倍周期分岔．(20.2) 定义了 (ω,k) 平面上的一条曲线 $\omega=\omega(k)$．按 §19 的讨论，沿着 $\omega=\omega(k)$，倍周期分岔发生于分岔点上，

$$k_i^{(n)}=D_i-D_i^*\delta_1^{-n}, \tag{20.3}$$

其中 $\delta_1=7.28469$．对 F_8/F_9 转数所作的计算见表 20.1，它证实了 (20.3)．根据 (18.3) 式，我们可以定义

$$\begin{aligned}\gamma=&(k_i^{(n)}-k_{i-1}^{(n)})/(k_{i+1}^{(n)}-k_i^{(n)})\\=&(F_{i+1}^{-z}-F_i^{-z})/(F_{i+2}^{-z}-F_{i+1}^{-z}).\end{aligned} \tag{20.4}$$

它在 $i \to \infty$ 时趋于

$$\gamma = \rho_G^{-z} = 1.6604. \tag{20.5}$$

表 20.1 转数 F_8/F_9 的倍周期分岔序列

n	Period	$k_8^{(n)}$	δ
1	2	1.02409720444983	···
2	4	1.02834686894493	···
3	8	1.02891167513570	7.8683
4	16	1.02898909113071	7.3366
5	32	1.02899972534345	7.2854
6	64	1.02900118573314	7.2825
7	128	1.02900138623559	7.2838
8	256	1.02900141376128	7.2842

因此， $k_i^{(n)}$ 与 n 及 i 的关系可表示为

$$k_i^{(n)} = 1 + (c_\infty - c\delta^{-n})\gamma^{-i}. \tag{20.6}$$

对给定 $n = 1$, $k_1^{(n)}$ 随 i 变化的情况见表 20.2. 由表 20.1 与表 20.2, 可以确定出 (20.6) 中的常数

$$c_\infty = 1.65\cdots, \quad c = 0.334\cdots.$$

它们与 n 、 i 无关.

表 20.2 $n = 1$ 的 α 值的计算

i	F_i/F_{i+1}	$k_i^{(1)}$	α
1	1/1	2.53655898923060	···
2	1/2	1.59367633160552	···
3	2/3	1.36078491318770	4.0486
4	3/5	1.19627291518724	1.4157
5	5/8	1.11597423822489	2.0488
6	8/13	1.06776535704082	1.6656
7	13/21	1.01041150542873	1.7624
8	21/34	1.02409720444983	1.6767
9	34/55	1.01445404665980	1.6918
10	55/89	1.00867538320366	1.6688
11	89/144	1.00521665554132	1.6707
12	144/233	1.00313801231450	1.6639
13	233/377	1.00188877737040	1.6639
14	377/610	1.00113704679966	1.6618

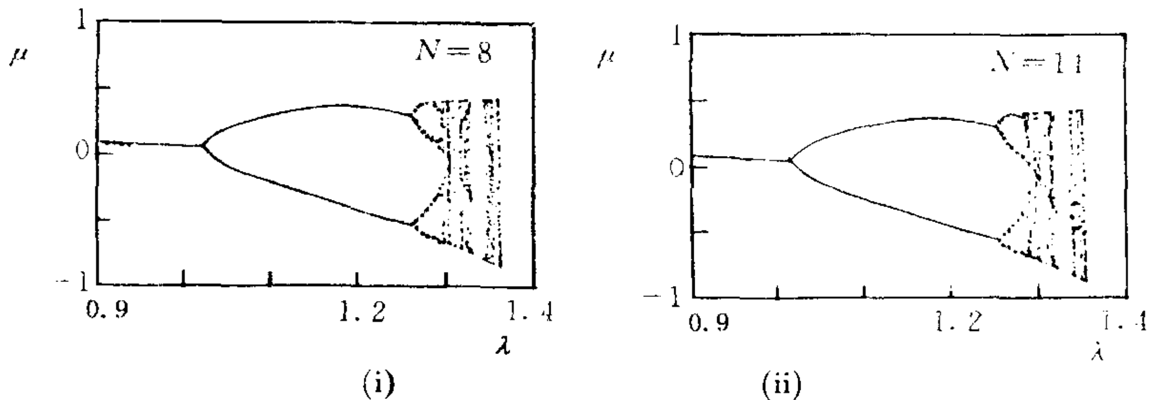
f 的极小点 $m = (2\pi)^{-1}\cos^{-1}(1/k)$ 与极大点 $M = -(2\pi)^{-1}\cdot\cos^{-1}(1/k)$ 在 $k-1$ 很小时可表为 $\pm\frac{1}{\pi}\left[\frac{(k-1)}{2}\right]^{1/2}$. 因此，如果期望不同 i 的 (k,x) 分岔图有相似性，坐标 x 以 $(k-1)^{1/2}$ 重新标度后将有全同性. 相应地，对应于 $k_i^{(n)}$ 定义

$$\lambda_i^{(n)} = \gamma^{i/2}(k_i^{(n)} - 1)^{1/2}. \tag{20.7}$$

它在 $i \to \infty$ 时趋向一个与 i 无关的极限

$$\lambda^{(n)} = (c_\infty - c\delta^{-n})^{1/2}. \tag{20.8}$$

我们将以 $\lambda^{(n)}$ 代替 $k_i^{(n)}$ 作为新的参数. 相应地，对 x 作同样的标度 $\mu = 2^{1/2}\gamma^{i/2}x$. 分岔图 (λ,μ) 在 i 很大时应该与 i 无关. 情况确实如此，图 20-1(i) 与 (ii) 分别给出了 $i=8$ 与 $i=14$ 情况的 (λ,μ) 分岔图，这两图几乎是全同的. $i\to\infty$ 时 F_i/F_{i+1} 趋向黄金分割数，因此图 20-1 也给出了准周期 ρ_G 向混沌转变的描述.



(i) (ii)

图 20-1

§21 超临界圆映射的混沌测度及其标度律

到现在为止，我们已经搞清楚了标准正弦圆映射在临界线之上的分岔及向混沌过渡的情况．随着耦合强度 k 值的继续增加，在 (ω, k) 平面上，混沌状态所占的比率越来越大．在混沌状态之间又有无穷多的周期窗口．关于周期窗口，上面关于符号动力学，阿诺尔德舌头之间的相互关系与参数平面上的分岔图的讨论，已经给出了对其描述的一般原则．我们很难对它作再进一步的详细的讨论．既然随 k 的增加，混沌状态越来越多，下面将着重研究混沌测度．

关于混沌测度，由单峰映射得到的概念同样适用于圆映射．圆映射是一维映射，混沌轨道在相空间的分布具有豪斯多夫维数 1．在参数平面 (ω, k) 上，混沌状态只出现在二维测度为 0 的线上．在任一混沌线的任意邻域内都可以找到周期状态．但正像单峰映射一样，在 (ω, k) 平面上存在无限多的临界曲线，它对应于单峰映射发生危机的临界点，在这样线的邻域，参数平面上的混沌测度趋于 1．根据这个图象，我们就可以简单地用数值办法计算 (ω, k) 平面上的混沌测度．

对给定的 k 值，把 ω 的 $(0, 0.5)$ 区间等分为 5000 分点，在每个分点上由相空间的 M 点或 m 点出发计算轨道的李雅普诺夫指数

$$\lambda = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \ln |f'_{\omega,k}(x_n)|. \tag{21.1}$$

如果 $\lambda > 0$，我们把该 (ω, k) 点所在的格子内由 M 或 m 出发的状态判定为混沌状态，否则为周期状态． $\lambda = 0$ 的临界状态的

测度为 0. 如果 5000 个点中有 N_0 个属于混沌状态，混沌测度 $M(k,M)$ 或 $M(k,m)$ 将定义为 $N_0/5000$. 由于极大点出发的轨道与由极小点出发的轨道对于 $\omega=1/2$ 是对称的，因此 k 值处 ω 轴上出现混沌的测度是

$$M(k)=\frac{1}{2}[M(k,M)+M(k,m)]. \tag{21.2}$$

在计算 λ 时，迭代次数为 3×10^3. 把迭代次数增加一倍或把分点数增加一倍，对测度计算的影响不会超过 1%. 计算结果得到了如图 21-1 所示的 $M(k)$ 图.

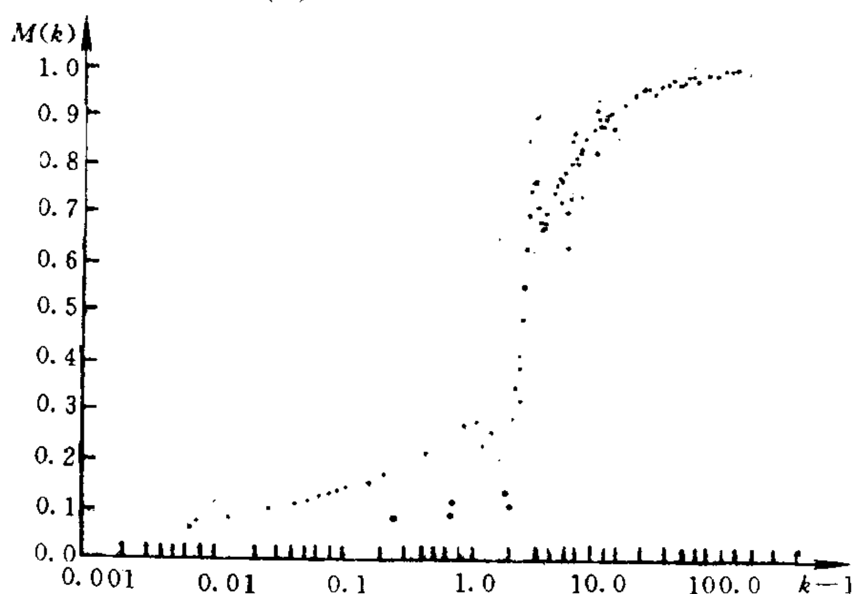


图 21-1

首先讨论 $k=1$ 的邻域的情况. 把所得到的数据用如下标度律

$$M(k)=A(k-1)^{\beta'} \tag{21.3}$$

拟合，得到

$$A=0.266\pm 0.004,\quad \beta'=0.270\pm 0.005. \tag{21.4}$$

在 §13 讨论次临界 $k<1$ 情况的准周期测度时，曾有与 (21.3) 类似的公式，那里的临界指数 $\beta=\nu(1-D)=0.34\pm 0.02$. 其中

$D = 0.87$ 是魔梯的分维，$\nu = 2.63$ 表示 $k = 1$ 时宽度 $\Delta\omega$ 小于 r_0 的阿诺尔德舌头在 $(1-k)^{\nu'} \propto r_0$ 所确定的 k 处几乎消失. 把超临界情况与次临界情况比拟，设 $\beta' = (1-D)\nu'$, 则 ν' 表明 $k = 1$ 时宽度为 Δ 的阿诺尔德舌头在 $(1-k)^{\nu'} \propto \Delta$ 所确定的 k 处将出现混沌. 对于非波那契序列，据 §20 的讨论，出现混沌与出现倍周期有同样的临界指数 z, 利用 (18.2) 与 (18.3), 可得 $\nu = \dfrac{y}{z} = 2.05405$. 如对所有阿诺尔德舌头平均，利用 (13.10) 与 (18.7), 则有 $\nu = \dfrac{\delta}{\sigma} = 3.1$. 显然，由非波那契序列的舌头所得的标度指数能给出与 (21.4) 一致的结果

$$\nu = 2.05405, \quad \beta' = (1-D)\nu' = 0.267. \tag{21.5}$$

初看起来，这个结果符合得那么好，似乎令人惊奇. 其实并不奇怪. 在 §18 中我们已经知道，那些趋向有理转数的长周期轨道，它们不会在 $k-1$ 很小时出现混沌. 只有趋向无理转数的长周期轨道在 $k-1$ 的邻域能出现混沌. 在所有趋向无理转数的序列中，非波那契序列舌头具有最大的宽度与最小的 ν'. 由表 10.1 可见，根据 $\nu' = \dfrac{y}{2x}$ 定义的 ν' 值，对 ρ_G 为最小，且对连分数表示简单的无理转数与 ρ_G 具有很接近的 ν' 值. 这样，在对所有阿诺尔德舌头中的混沌测度求和的时候，非波那契序列起了主要的作用.

由图 21-1 可见，(21.3) 与 (21.4) 给出的 $M(k)$ 可以相当好地拟合 $k-1$ 在 (0,1) 区间内测度值. 当然，由于阿诺尔德舌头内的分岔与舌头之间的重叠，在这一区域中也会出现无穷多周期窗口. 如图 21-1 所示，在这些 k 值处，$M(k)$ 会比 (21.3) 所示的低.

图 21-1 所示的 $M(k)$ 在 $k = 2$ 至 12 之间有复杂的结构，其中每一个谷都对应一个较大的周期窗口. 例如，$k \approx 2.8$ 处的谷

对应 0/1 与 1/1 舌头的周期窗口，在 $k \approx 2.8$ 之前与附近，这两个舌头线性地增大，$M(k)$ 也线性地下降；在 $k \approx 3$ 之后出现混沌，$M(k)$ 急剧上升．图中的其他谷大部分对应于低周期的新分支 (参见 §8 关于新生轨道的分析)．$k \approx 2\pi$ 的谷对应 1/2 转数的第二支周期轨道，$k \approx 3\pi$ 的谷对应 0/2 转数的第二支周期轨道．1/3 与 2/3 转数的第二支解出现于 $k \approx 4$, 第三支出现于 $k \approx 5.5$, 第四支出现于 $k \approx 7$, 第五支出现于 $k \approx 7.4$. 2/5 与 3/5 转数的第二分支出现于 $k \approx 2.2$. 至此，图上剩下的不属于上述情况的谷是 $k \approx 3.2$ 处的谷，它对应于 1/1 舌头的三倍周期窗口．另一点需要说明的是，法里序列的倍周期及新出现的每一周期解对同一初值都有上下两个分支．这使对应的谷之后另有一个较浅的谷，例如 $k \approx 4.0$ 附近的谷也包含有 0/2 与 2/2 上分支的贡献．

$k > 10$ 之后，图 21-1 的 $M(k) \to 1$, 进入另一个标度区，有标度关系

$$1 - M(k) = A'k^{\beta''}. \tag{21.6}$$

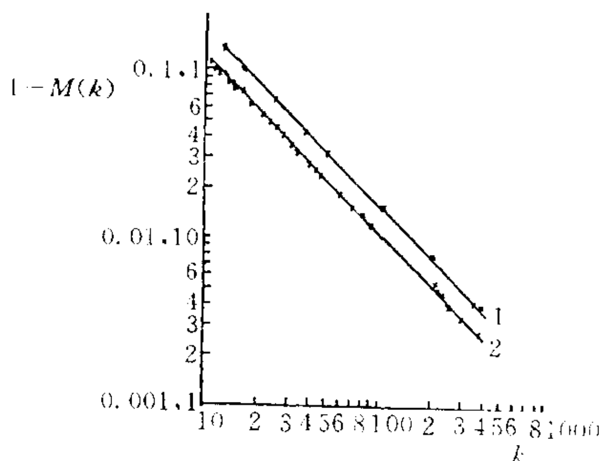


图 21-2

图 21-2 给出了对 $k = 10$ 至 128π 区间内 $(1 - M(k))$ 与 k 的关系图．曲线 *1* 只取 $k = n\pi$ 处的值，曲线 *2* 取其他的 k 值．两条曲线平行，都显示了 $\beta'' = -1$. A' 值分别为 $A'_1 = 1.6$, $A'_2 = 1.38$. 为了进一步搞清这两条曲线的意义，分别在 $k = 4\pi$ 与

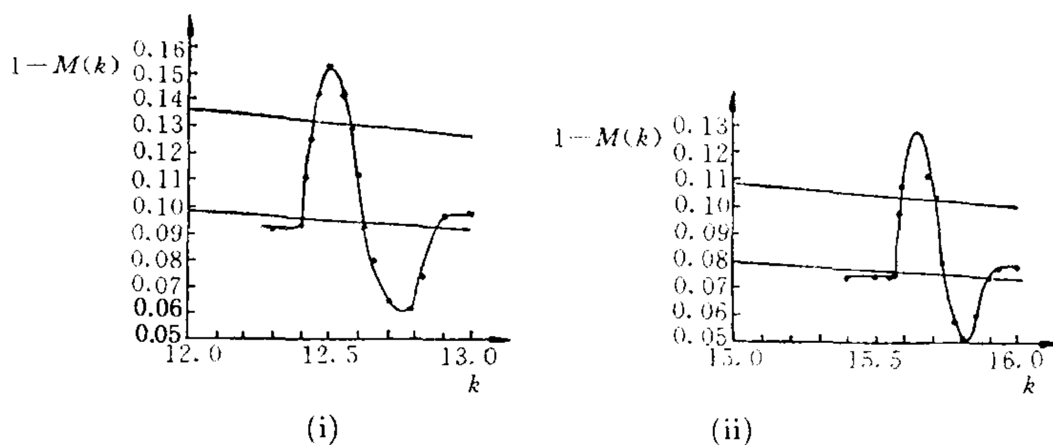
5π 附近作详细的计算，得到图 21-3(i) 与 (ii). 它们显示了 $n\pi$ 附近光滑的振荡结构. 根据 §8 关于新生轨道的讨论，并参考图 16-1 可见，在 $k \approx 2n\pi$ 处的贡献来自新生的 1/2 轨道

$$P_{-n}m_1 \text{ 与 } N_{-n+1}m_1 \quad \text{或} \quad P_{n+1}M_1 \quad \text{与} \quad N_nM_1. \tag{21.7}$$

这些轨道出现的极小 k 值位于 $\omega = 1/2$ 处. $k = (2n-1)\pi$ 处的贡献来自新生的 0/2 轨道

$$P_{-n}m_0 \text{ 与 } N_{-n+1}m_0 \quad \text{或} \quad P_nM_0 \quad \text{与} \quad N_{n-1}M_0. \tag{21.8}$$

图 21-3 中的峰值对应于新生轨道中间混沌区的贡献，谷值由于包含了两个分支的周期窗口的贡献，显得比其他 k 值处更低.



(i) (ii)

图 21-3

最后，我们证明 $\beta'' = -1$. 为此，首先计算 0/1 舌头稳定区在 $k \to \infty$ 时在 ω 轴上所占的测度. $k \to \infty$ 时 0/1 轨道的分岔可渐近地用二次单峰映射

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2, \; x_0 = \pm\frac{1}{2\pi}\cos^{-1}\frac{1}{k} \tag{21.9}$$

来描述. (21.9) 可通过共轭变换变为

$$f(x) = 1 - ax^2,$$

其中

$$a = \pi k \sin 2\pi x_0 \left(\frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x_0 - \omega \right).$$

由此可得倍周期分岔聚点 $a_\infty = 1.40116$ 所对应的 ω_∞ 为

$$\omega_\infty \approx \frac{k}{2\pi} - \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{a_\infty}{\pi} \right) \frac{1}{k}.$$

随着 k 的增加， 0/1 轨道出现于 $\omega_0 = k/2\pi$, 所以 ω 轴上倍周期区间的长度为 $(a_\infty + 1/4)/\pi k$. 此外， 在 $a(1.40116, 2)$ 区间内有 10% 为周期区. 所以， 0/1 舌头向左或向右分支对周期窗口测度的贡献为

$$\Delta\omega(0/1) = \left[a_\infty + 0.1 \times (2 - a_\infty) + \frac{1}{4} \right] \Big/ \pi k = \frac{0.54}{k}. \qquad (21.10)$$

数值 0.54 与 (21.6) 拟合的 $A_2' = 1.38$ 仍有相当差距， 这些差别来自高周期轨道的贡献. 对于高周期轨道 p/q, 在大 k 值处可只研究

$$g(x) = f^{(q)}(x) - p$$

在 $x_0 = \pm \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} \frac{1}{k}$ 处所对应的二次单峰映射

$$g(x) \approx g(x_0) + \frac{1}{2} g''(x_0)(x - x_0)^2,$$

其中

$$g''(x_0) = 2\pi k \sin 2\pi x_0 (1 - k \cos 2\pi x_1) \cdots (1 - k \cos 2\pi x_{q-1}). \quad (21.11)$$

通常 $\cos 2\pi x_i$ 不随 k 趋向无穷而趋向 0, $i = 1, 2, \cdots, q-1$, 因此 (21.11) 中 q 个因子贡献 q 个 k:

$$g''(x_0) \propto k^q,$$

所以每一如 $\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_{q-1}}M_p$ 的轨道的 $\Delta\omega(p/q)$ 以

$$\Delta\omega(p/q)_{\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_{q-1}}M_p} \propto k^{-q}$$

随 k 迅速趋于 0. 但 p/q 轨道的类型 $\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_{q-1}}M_p$ 也将随 k 值增加而迅速增加. 每个 σ_i 的 i 值的选择可能性与 k 成正比地增加. 由极大值 M 出发的 p/q 轨道的总贡献为

$$\sum_{\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_{q-1}}} (\Delta\omega)_{\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_{q-1}}M_p} \propto k^{-1}.$$

对由极小值 m 出发的轨道, 也有相似的结果. 这样就证明了 $\beta'' = -1$. 至于对 (21.6) 式的系数 A' 的贡献, 由上面的讨论可见, 高周期轨道的贡献是不能忽略的. 但是, 由每一个确定符号 $\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_{q-1}}M_p$ 表示的周期轨道的贡献都非常小.

第 5 章

实际问题中的圆映射举例

在本书的第 1 章，我们曾列举了一些与圆映射有关的实际例子．这些例子都与两个周期运动的耦合有关系，在这两个周期运动中，一个是给定的，另一个是受扰的，其运动情况是我们要研究的．在 17 世纪，惠更斯就注意到，背靠背挂在墙上的两个钟，其运动会达到互相同步，这就是我们讨论过的锁相现象．在标准正弦圆映射中，我们发现了许多精细的现象．在实际问题中的耦合二周期问题不像圆映射那么简单，也可能与正弦圆映射很不相同．但在实际问题的研究中，我们可以看到本书前面所得到的标度律的普适性，同时又可以用实际问题中提出的各种不同圆映射来丰富我们的研究内容．

§22 周期驱动阻尼单摆、约瑟夫逊结与电荷密度波系统

周期驱动阻尼单摆是一很基本的又有实际应用价值的两周期耦合问题．描述它的微分方程是

$$\alpha\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + \gamma\sin\theta = A + B\cos\omega t. \tag{22.1}$$

对于周期驱动阻尼单摆来说，α 为质量，β 为阻尼系数，γ 为重力. 此外，方程 (22.1) 也描述约瑟夫逊结与电荷密度波 [31]. 图 22-1 给出了方程 (22.1) 所描述的含约瑟夫逊结的等效电路. 电源的电流 $A+B\cos\omega t$ 分流过并联的电容 C 、电阻 R 与约瑟夫逊结. I_c 为结的临界电流，θ 是跨结的相位差，对约瑟夫逊结说，电势差 V 与相位 θ 之间有关系 $V=\frac{\hbar}{2e}\dot{\theta}$. 把等效电路方程表示为 θ 的方程：

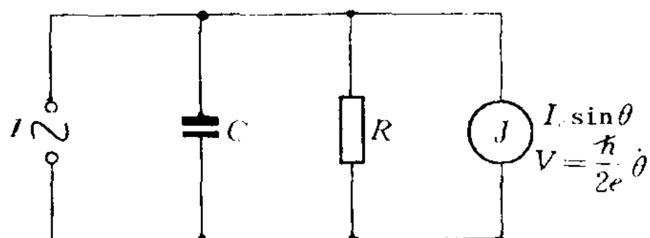


图 22-1

$$\begin{aligned}A+B\cos\omega t =&C\frac{dV}{dt}+\frac{V}{R}+I_C\sin\theta\\ =&\frac{\hbar C}{2e}\ddot{\theta}+\frac{\hbar}{2eR}\dot{\theta}+I_c\sin\theta,\end{aligned}$$

其形式与 (22.1) 完全相同，其系数的意义是自明的. 图 22-2 给出了在杂质钉扎势和外加直流与交流电场下的电荷密度波. θ 表电荷密度波相对杂质势的滑移位置. α 、β 、γ 分别表示有效质量、阻尼与周期势. A 表直流电场，当它超过某临界值时，电荷密度波退钉扎. B 是交流电场的振幅.

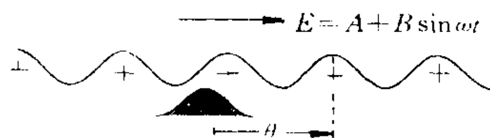


图 22-2

对上述系统，当存在整数 p 、q, 使

$$\theta(t_0+qT)=\theta(t_0)+2\pi p \tag{22.2}$$

时发生锁相，系统的相位与外力的相位保持固定关系. (22.2) 可表示为

$$\langle\dot{\theta}\rangle=\frac{p}{q}\frac{2\pi}{T}=\frac{p}{q}\omega, \tag{22.3}$$

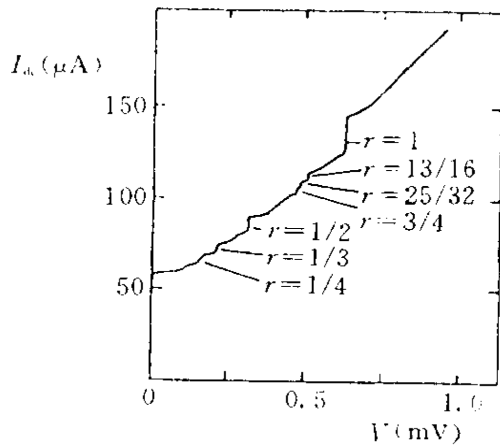


图 22-3

其中 T 是外力周期. 对约瑟夫逊结, $V = \frac{\hbar}{2e}\dot{\theta}$, 锁相表现为 I-V 曲线上的台阶. 图 22-3 给出了在 295 GHz 微波场中的 Nb-Nb 结上看到的这些台阶, $q = 1$ 的称为 Shapiro 台阶. 在电荷密度波系统中, 电流正比于 $\langle\dot{\theta}\rangle$, 比之约瑟夫逊结, 电流与电压的位置正好对换. 图 22-4 给出了在 $NbSe_3$ 中测量得的电荷密度波输运中微分电阻 dV/dI 与样品电压 V 的关系 [32]. 图 22-4(i) 加 25 MHz 射频电压, 图 22-4(ii) 不加射频电压, (i) 图中的峰值对应于 I-V 曲线中的台阶.

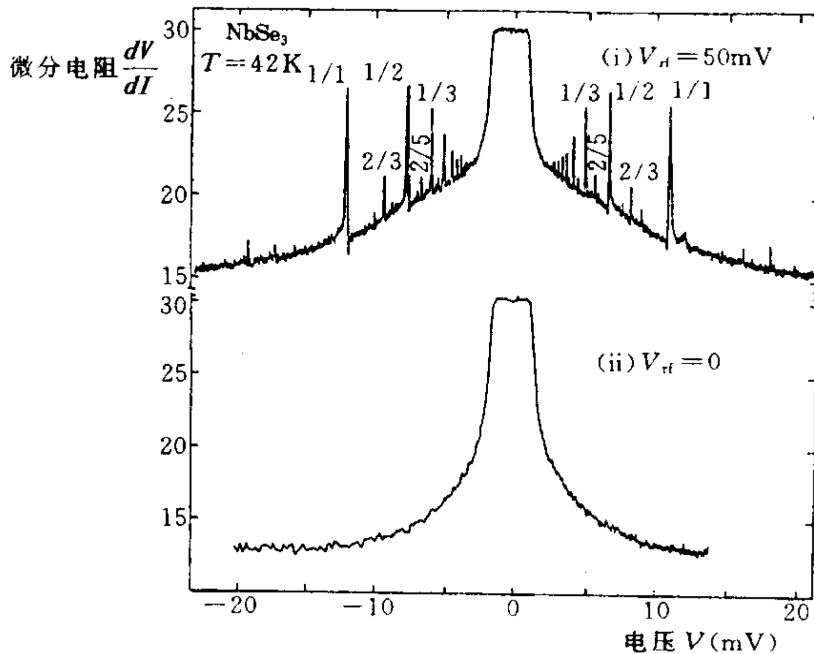


图 22-4

(22.1) 是耗散系统, 如以 θ 与 $\dot{\theta}$ 为独立变量, 相空间体积的收缩率是 β/α. 当 $\alpha \to 0$ 时, 收缩率趋于无穷, $\dot{\theta}$ 不再是独

立变量，相空间成为一维的，(22.1) 等价于一圆映射．但这时只有倍频现象，$q=1$, 在这个意义上，α 是非线性的度量．由于耗散性，我们期望 (22.1) 的长时间行为使 $\dot{\theta}$ 与 θ 之间存在关系，因此问题可由一圆映射描述，

$$\dot{\theta}=g(\theta), \quad \theta_{n+1}=f(\theta_n)=G_1(\theta_n, g(\theta_n)), \tag{22.4}$$

其中 θ_n 是 nT 时刻的 θ 值．除非 $\alpha \to 0$, 我们不知道 (22.4) 是否存在．我们能作的是直接数值解 (22.1), 然后找出 (22.4) 式的关系．图 22-5 给出了这样约化了的映射．在这个参数值处系统作准周期运动，转数 $\rho \approx 0.38$. 小方框把一小段曲线放大了，表明了映射的一维性．改变参数值，我们可能有周期轨道，只能得 q 个离散点 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_q \pmod{2\pi}$ 的图．看来，当映射出现零斜率点时，将会发生到混沌的转变．但是，当出现混沌后，映射不再简单地有局部极大与极小，而是会起皱褶，继而出现分形结构，一维映射只有近似的意义．重要的是，在临界点以下，一直到临界点，返回映射事实上是一维的．

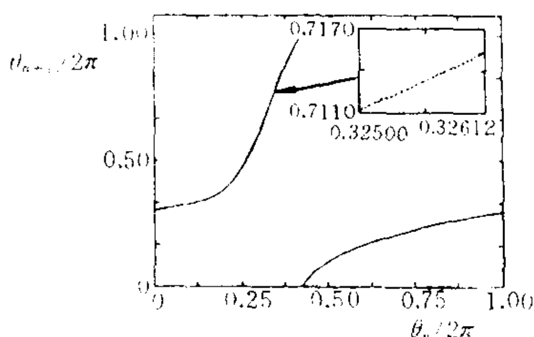


图 22-5 (22.1) 式 $\alpha=\gamma=B=1$, $\beta=1.576$, $A=1.4$, $\omega=1.76$ 时的返回映射

一般地说，在 nT 时采样，(22.1) 定义了一个二维映射 [31]

$$\begin{pmatrix}\theta_{n+1}\\ \dot{\theta}_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}G_1(\theta_n,\dot{\theta}_n)\\ G_2(\theta_n,\dot{\theta}_n)\end{pmatrix}. \tag{22.5}$$

其雅可比行列式为 $J=\exp[-(2\pi/\omega)/(\beta/\alpha)]$. 现在来看 $f(\theta)$ 有零

斜率意味着什么. 由 (22.4) 与 (22.5) 可得

$$f'(\theta_n) = \frac{\partial G_1}{\partial \theta_n} + \frac{\partial G_1}{\partial \dot{\theta}_n} g'(\theta_n), \tag{22.6a}$$

$$g'(\theta_{n+1}) f'(\theta_n) = \frac{\partial G_2}{\partial \theta_n} + \frac{\partial G_2}{\partial \dot{\theta}_n} g'(\theta_n). \tag{22.6b}$$

现设

$$f'(\theta_n) = 0. \tag{22.7}$$

因为雅可比行列式不为 0, 所以

$$g'(\theta_{n+1}) f'(\theta_n) \neq 0. \tag{22.8}$$

它意味着

$$|g'(\theta_{n+1})| \to \infty. \tag{22.9}$$

利用 (22.6a), 我们发现

$$|f'(\theta_{n+1})| \to \infty, \tag{22.10}$$

除非

$$\partial G_1 / \partial \dot{\theta}_{n+1} = 0. \tag{22.11}$$

假设 $f'(\theta_{n+1})$ 仍有限，我们必须采取 (22.11). 因为 $J \neq 0$, 所以

$$\partial G_2 / \partial \dot{\theta}_{n+1} \neq 0. \tag{22.12}$$

因此，由 (22.6b) 与 (22.9) 得

$$|g'(\theta_{n+2}) f'(\theta_{n+1})| \to \infty.$$

因此

$$|g'(\theta_{n+2})| \to \infty. \tag{22.13}$$

重复这个论证可知, 如 $f'(\theta_n)\to 0$, 且 $\partial G_1(\theta_{n+j}, g(\theta_{n+j}))/\partial\dot{\theta}_{n+j} = 0$, $j=1,2,\cdots,N$, 则 $f'(\theta_{n+1}), f'(\theta_{n+2}),\cdots,f'(\theta_{n+N})$ 仍有限, 但是 $|f'(\theta_{n+N+1})|\to\infty$. 图 22-6 显示了这种情况. 在所取的情况下, $f'(\theta_I)\sim 0$, $f^{(2)'}(\theta_I)\to\infty$. 因此, 当存在 θ 使 $f'(\theta)=0$ 时, 相空间的不变圆 $g(\theta)$ 将不再光滑.

我们关心的基本问题是, 由 $f'(\theta)=0$ 定义的参数空间的临界曲线是否光滑. 对于这个问题, 较简单的作法是在耗散标准映射

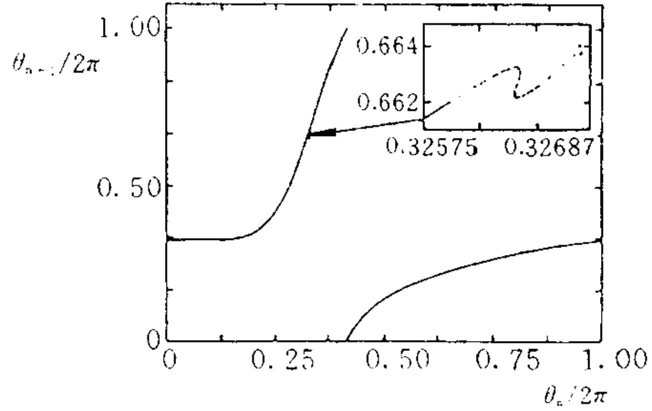


图 22-6 $\beta=1.253$, $A=1.2$, 其他参数与图 22-5 相同时的返回映射, 小框显示了拐点.

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}_{n+1} &= b\dot{\theta}_n - \frac{k}{2\pi}\sin(2\pi\theta_n), \\
\theta_{n+1} &= \theta_n + \omega + \dot{\theta}_{n+1}
\end{aligned}
\tag{22.14}
$$

中作计算检验. 在这里, 我们不需要作积分计算. (22.14) 的雅可比行列式为 b. 在临界线处, 系统作周期运动, 我们将把周期轨道上 $g'(\theta)$ 无定义处的参数值作为临界点. 据 (22.6a) 与 (22.6b), 有

$$
g'(\theta_{n+1}) = \frac{\partial G_2/\partial\theta_n + g'(\theta_n)\partial G_2/\partial\dot{\theta}_n}{\partial G_1/\partial\theta_n + g'(\theta_n)\partial G_1/\partial\dot{\theta}_n}. \tag{22.15a}
$$

引入 $m(\theta)$ 与 $n(\theta)$, 使

$$
g'(\theta) = m(\theta)/n(\theta), \tag{22.15b}
$$

则 (22.15a) 等价于

$$\begin{pmatrix} n(\theta_{n+1}) \\ m(\theta_{n+1}) \end{pmatrix} = D(\theta_n, \dot{\theta}_n) \begin{pmatrix} n(\theta_n) \\ m(\theta_n) \end{pmatrix}. \tag{22.16}$$

其中 $D(\theta,\dot{\theta})$ 是映射 (22.14) 的雅可比矩阵. 对于 q 周期轨道, 其雅可比矩阵

$$M_q = D(\theta_q, \dot{\theta}_q) \cdots D(\theta_1, \dot{\theta}_1). \tag{22.17}$$

当它有相同本征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{\det M_q}$ 时, 继续的 M_q 的作用不会使 g' 趋向确定值. 因此, 在

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{\det M_q} = b^{q/2} \tag{22.18}$$

处, 不变圆 $g(\theta)$ 失去光滑性. 其实, 对于二维映射的 q 周期轨道, 由于 $\lambda_1\lambda_2 = b^q$, (22.18) 相当于定义了最稳定轨道. 它相当于要求一维映射的 q 周期超稳定轨道应满足 $f^{(q)'}(\theta) = 0$. 对于给定的 λ 与转数 p/q, (22.18) 定义了 (ω, k) 平面上的一条双曲线. 作一条曲线与所有的 p/q 的这些双曲线相切, 就得到所需的临界线. 图 22-7 显示了这一图象. 虚线是把双曲线最低点连起来得到的近似临界线. 图 22-8 给出了对耗散标准映射 (22.14) 在 $b = 0.25$ 时的临界曲线. 由图可见, 对于高周期, 它很快地变成光滑的. 根据图 22-7 中定义的 $\Delta\omega(p/q)$ 与 ω 的魔梯关系, 可以算得相应的维数. 对 $b = 0.25$ 在转数 $1/4 < \rho < 1/3$ 区间内得 $D = 0.86 \pm 0.01$, 对 $b = 0.5$ 在 $1/2 < \rho < 2/3$ 区间内得 $D = 0.87 \pm 0.01$. 它们在误差范围内都与圆映射的结果一致.

对于约瑟夫逊结的参数情况, 曾用模拟计算机作过计算[33]. 把方程 (22.1) 在归一的单位中写成

$$\ddot{\theta} + G\dot{\theta} + \sin\theta = A_0 + A_1 \sin\omega t, \tag{22.19}$$

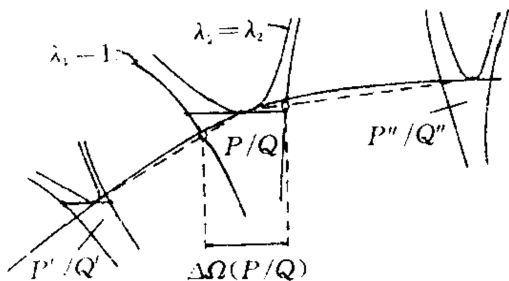


图 22-7

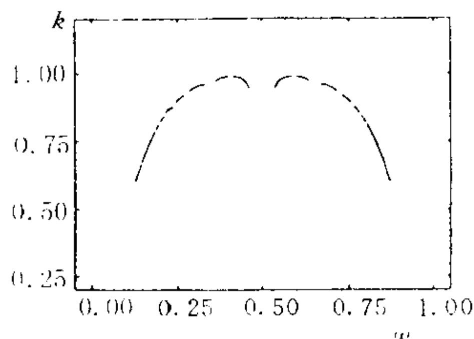


图 22-8

其中 $G=\sqrt{\hbar/2ecI_C}/R$, 结电压为 $V(t)=RI_CG\dot{\theta}$. 图 22-9 给出了对固定的 $A_0=0$, $A_1=1$, $\omega=1.76$ 与不同的 G 的 I-V 曲线, 它们显示了 0/1 与 1/1 台阶之间的分频台阶 $V=\dfrac{h}{2e}\dfrac{p}{q}\omega$. 可以看到, 随着阻尼系数的减小, 台阶的宽度增加. 在某些箭头所示的临界值处发现了滞后效应, 并且随 G 的进一步降低而增强. 这是因为, 随着 G 的降低至临界曲线处, 台阶充满了临界曲线, 再进一步降低会出现多重解, 因而有滞后效应. 因此, 可以把滞后效应出现处视为临界点. 把台阶密集部分放大, 可测得近 140 个台阶的宽度, 最大 q 值约 20. 为了计算魔梯的分维, 采用如下办法: 计数宽度大于 r 的阶梯数 $N(r)$, 当 $r\to 0$ 时, $N(r)\propto r^{-D}$, 由此得 $D=0.87\pm0.02$. 与理论结果一致. 此外, 还对 $1/q$ 阶梯序列的宽度作了测量, 得到 $\Delta I(1/q)\propto q^{-\delta}$, $\delta=2.95\pm0.08$. 在 §13, 我们曾得到正弦圆映射的这一序列的转数 ρ 与参数 ω 的关系 $\rho\propto\left(\omega-\dfrac{k}{2\pi}\right)^{1/2}$, 由它可得

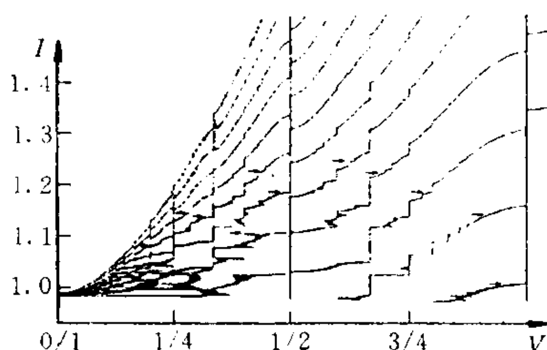


图 22-9

$$\Delta\omega\left(\frac{1}{q}\right)\propto q^{-3}. \tag{22.20}$$

所以，在误差范围内，实验与理论结果一致.

关于 $NbSe_3$ 中电荷密度波的 I-V 曲线，已显示于图 22-4. 对于 $NbSe_3$, (22.1) 中的惯性项很小，至几百 MHz 时仍可忽略. 这样，(22.1) 只有倍频而没有分频，但图 22-4(i) 显示了分频. 对分频出现的一种可能解释是：系统可能分成许多区域，描述每个区域的方程都无惯性项，但不同区域之间的耦合可能产生分频. 这样产生的分频可能是不完全的，图 22-4(i) 显示对大的 p 与 q 锁相很弱. 不论分频的起因是什么，可以用下述办法检验阶梯的完全性. 取电流轴的长度为 1 的区间，计算宽度大于 r 的台阶的总长度 $S(r)$. 如 $N(r) = [1 - S(r)]/r$ 则 rN 为没被大于 r 的台阶所占的区间长度. 对在 (0,1/2) 区间内 p/q 台阶的统计计算结果为 $D = 0.91 \pm 0.03$. 对不同的电压与 (1/2,1), (1/3,2/3) 区间，都得到相同的结果. 因此，当 $r \to 0$ 时，$rN \to 0$, 魔梯是完全的，但是维数与理论值 0.87 并不一致.

§23 周期强迫瑞利 - 贝纳德对流系统

本节将介绍一个在瑞利 - 贝纳德对流系统中做的由准周期到混沌转变的实验 [34]. 在 §11 中我们曾经提到这个实验. 热对流系统由两个无量纲参数描述，普朗特数 $P = \nu/k$, 瑞利数 $R = \alpha d^3 \Delta T g/\nu k$, 其中 ν 为动力粘滞系数，k 为热导率，α 为热胀系数，d 为流层厚度，ΔT 为温度，g 为重力加速度. 实验装置为一小方向比的立方体 $0.7 \times 0.7 \times 1.4\text{cm}^3$, 其中装满汞. 汞有小的 Pr 值，在发生对流后的第一次分岔是霍普夫分岔，它导致了振荡态. 这是我们问题中的第一个振子. 第二个振子由电

磁过程产生．在装置上加上水平方向平行对流轴的 200 G 的直流磁场与通过分开两个对流圈平面的交流电流 (约 20 mA 量级)．洛伦兹力将诱导产生垂直方向的涡流．这是第二个振子，其频率与振幅是可控制的．实验中用一脉冲激发，脉冲宽度是周期的 1/10．用周期脉冲代替正弦波的好处，是允许流体有更多的自由运动时间．系统内部频率固定为 0.230 Hz，稳定性为 10^{-5}．外加频率发生器的稳定性超过了实验的需要．

图 23-1 给出了 $R = 4.09R_C$ 时的一些阿诺尔德舌头．其中 $\omega_{0I}^{(0)}$ 是无外力时的频率，$\rho_G = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$，$\rho_S = \sqrt{2}-1$．能够测到 $q > 200$ 的稳定的舌头．当舌头发生重叠时，认为到了临界点．临界线不是直线，对于 ρ_G 与 ρ_S，临界点的位置如图所示．表 23.1 给出了 ρ_G 与 ρ_S 邻域的台阶的宽度．对 ρ_G，是在 $R = 4.09R_C$ 与 $A = 17.4\text{mA}$ 情况下测得的；对 ρ_S，是在 $R = 3.94R_C$ 与 $A = 19.4\text{mA}$ 情况下测得的．根据表 23.1 与公式 (11.6)，可由 ρ_G 数据算得 $D = 0.86 \pm 3\%$，由 ρ_S 数据算得 $D = 0.85 \pm 3\%$，它们在误差范围内与正弦圆映射的结果一致．

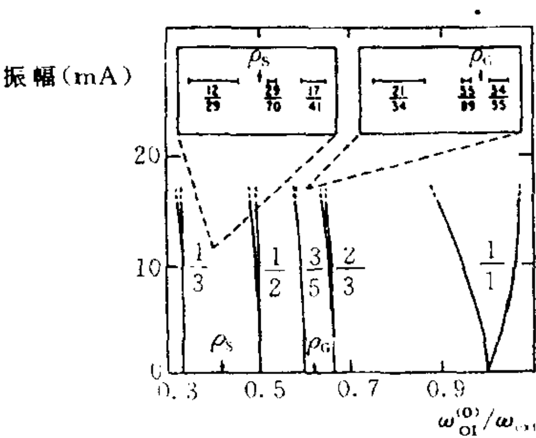


图 23-1

表 23.1

	锁相态	$f\omega_{low}$mHz	ω_{high} (mHz)
$\rho_G = \{1, 1, \cdots\}$	13/21	392.350	392.663
	21/34	393.230	393.345
	34/55	393.050	393.095
	55/89	393.133	393.155
$\rho_S = \{2, 2, \cdots\}$	12/29	574.175	574.575
	17/41	573.450	573.650
	29/70	573.865	573.925

图 23-2 给出了 $R = 4.09R_c$, $\rho = \rho_G$ 处的功率谱 $\log p(\omega)$. 图 (i), $A = 16.9\text{mA}$, 在次临界状态; 图 (ii), $A = 17.4\text{mA}$, 最接近临界点; 图 (iii), $A = 21.5\text{mA}$, 在临界线之上, 已显示出混沌噪声连续谱. 为了显示其标度性, 用 $\log\left[\frac{p(\omega)}{\omega^2}\right]$ 对 $\log\omega$ 作图, 得到图 23-3. 其中标以数字 1 的是 $\omega = \omega_0\rho_G^n$, ω_0 是内部频率. 事实上, 第一代谱线可由公式 $\omega = |m\rho_G - n|$ 得到, 其中 m、n $(m > n)$ 取非波那契序列 1,1,2,3,5,8, $\cdots$ 的相断数值. 第二代则以 (2,2) 为种子, 第三代以 (1,3) 为种子, 第四代以 (3,3) 为种子, 等等. 图显示了与 §10 中图 10-2 同样的自相似性. 对 ρ_S 功率谱, 也有类似的自相似性.

图 23-2

图 23-3

最后, 计算临界

线上两个序列的相邻宽度差之比

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_{n-1} - \Delta_n}{\Delta_n - \Delta_{n+1}}.$$

对 ρ_G, 得到 $\delta = 2.8 \pm 10\%$, 对 ρ_S, 得到 $7.0 \pm 10\%$. 它们都与由表 10.1 求得的理论值 2.833(对 ρ_G) 与 6.799(对 ρ_S) 一致.

§ 24 Frenkel-Kontorova 模型中的整体普适性

本节将介绍凝聚态物理中公度 - 不公度 (CI) 相变模型中的魔梯. CI 相变的最简单模型是 Frenkel-Kontorova(FK) 模型. CI 相变也是一个两频问题，但是 FK 模型不能约化为圆映射. 通过对 FK 模型临界线与魔梯的分析可以看到，由圆映射得到的临界线上的标度性在与其无关的 FK 模型中也存在 [35].

FK 模型描述在周期外场中以弹簧力互作用的一维原子链. 系统的势能为

$$H = \sum_n \left[\frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n - \mu)^2 - \frac{V}{(2\pi)^2}\cos(2\pi x_n)\right], \qquad (24.1)$$

其中 x_n 是第 n 个原子的位置， μ 是 $V = 0$ 时原子链的平衡原子间距. 由 (24.1) 得作用在第 n 个原子上的力为

$$F_n = x_{n+1} - 2x_n + x_{m-1} - \frac{V}{2\pi}\sin(2\pi x_n). \qquad (24.2)$$

因此，原子的静止位置由 $F_n = 0$ 即标准映射

$$p_{n+1} = p_n + \frac{V}{2\pi}\sin(2\pi x_n), \quad x_{n+1} = x_n + p_{n+1} \qquad (24.3)$$

描述．标准映射的所有轨道与混沌轨道都对应 FK 模型的一个静态位形．我们知道，(24.3) 有三种轨道：周期轨道，准周期轨道与混沌轨道．对于正则映射，准周期轨道又称为 KAM 曲线．在 FK 模型中采用 hull 函数 h 来描述原子的位置，

$$x_n = h(n+\alpha) = n + \alpha + g(n+\alpha), \tag{24.4}$$

其中 $g(x)$ 是以外势周期为周期的周期函数，α 是相对外势的相位．根据 (24.4), 可假设初始时刻 $g(x)=0$, 解方程组

$$\frac{dx_n}{dt} = F_n, \qquad (n = 0, 1, \cdots, q) \tag{24.5}$$

让 $x_q = x_0 + p$ 来得到 $w = p/q$ 的轨道．在 KAM 曲线破缺以前，这样得到的轨道是 FK 模型在给定 $w = p/q$(它相应于圆映射中的转数) 情况下的基态，它对应标准映射的不稳定 p/q 轨道．

对于无穷链，w 应由模型参数 μ 、 V 确定．这样，每一 $w = p/q$ 对应 (μ, V) 平面上的一个阿诺尔德舌头．利用 (24.5) 可求得系统能量．把能量写成二项

$$E(\mu, V, w) = E_{\rm el}(\mu, w) + E_{\rm lock}(V, w), \tag{24.6}$$

其中

$$\begin{aligned} E_{\rm el} &= \sum_n \frac{1}{2}(\mu - w)^2, \\ E_{\rm lock} &= \sum_n \left\{ \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)^2 - \frac{1}{2}w^2 + \frac{V}{(2\pi)^2}\cos(2\pi x_n) \right\}. \end{aligned} \tag{24.7}$$

选一 $\bar{q} \gg q$ 而 $\bar{w} = \bar{p}/\bar{q} \approx w = p/q$ 的 $\bar{w}$, 则舌头的近似边界 μ_B 可由下式确定：

$$E(\mu_B, V, w) = E(\mu_B, V, \bar{w}). \tag{24.8}$$

把 (24.7) 代入，可解出

$$\mu_B = \frac{E_{\text{lock}}(V,w) - E_{\text{lock}}(V,\bar{w})}{w-\bar{w}} + \frac{1}{2}(w+\bar{w}). \tag{24.9}$$

这样，我们便可作出参数空间 (μ, V) 上的相图. 图 24-1 给出了 FK 模型的相图. 与圆映射不同，相图 24-1 表示的参数 μ、V 值下系统的基态，一般情况下系统只有唯一的基态，因此阿诺尔德舌头不会相交.

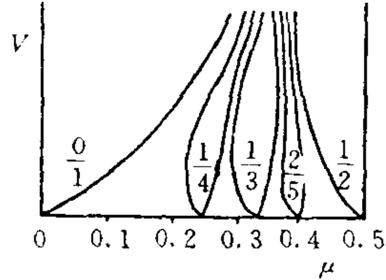


图 24-1

对每一无理数 w_i, V 值有一临界点 $V_c(w_i)$, 在 $V_c(w_i)$ 之上无理轨道变为混沌轨道. 对于标准映射，可用余数的办法求临界点. 对于 FK 模型，用声子谱间隙来确定临界点更符合模型的物理实质. 对准周期轨道，(24.4) 定义的 $g(x)$ 函数是光滑函数，即在外势的每一相位上光滑地分布着原子，原子链不需要能量就可以移动. 对混沌轨道，$g(x)$ 为不连续函数，不给系统以能量不能使原子链移动，因此声子谱有一间隙. 声子谱可由下述方程的本征值问题

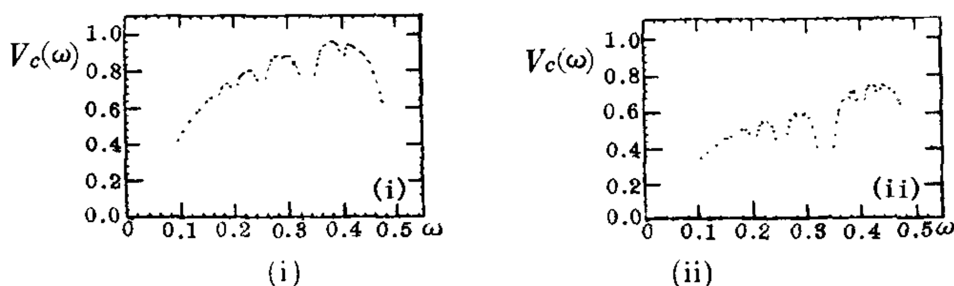
$$-\omega^2\delta x_n = \delta x_{n+1} - 2\delta x_n + \delta x_{n-1} - V\cos(2\pi x_n)\delta x_n$$
$$n = 1, 2, \cdots, q \tag{24.10}$$

解得. 在临界点邻域，间隙 $\omega_{\min}$ 与 V 之间有标度关系

$$\omega_{\min} \propto [V - V_c(\omega_i)]^x. \tag{24.11}$$

据此可确定出 $V_c(w_i)$. 对于黄金分割数，$1.0 < x < 1.03$. 对每一对邻近的阿诺尔德舌头，我们都可用按黄金分割定义其间的

一个无理数，并找出其相应的临界点 $V_c(w_i)$. $V_c(w_i)$ 作为 w_i 的函数，就是临界线. 图 24-2 给出了正弦势 FK 模型与具有扰动势 $\frac{V}{(2\pi)^2}\left[\cos(2\pi x_n)+\frac{0.135}{9}\cos(6\pi x_n)\right]$ 模型的临界线. 在临界线上有完全的魔梯结构. 图 24-3 作出了 FK 模型在临界线上的魔梯. 由此可得其豪斯多夫维数 $D_0=0.87\pm0.02$, 与圆映射的结果一致. 对图 24-2 所示的两个模型，都得到相同的 D_0 值，但对 §11 引入的奇异谱 $f(\alpha)$, 两种情况下却不相同.



(i) (ii)

图 24-2

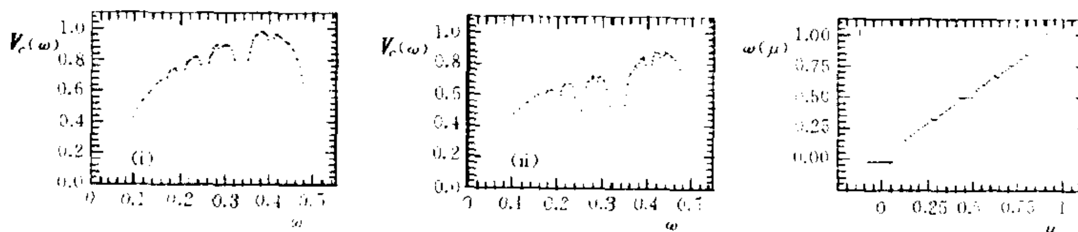


图 24-3

§25 可激振子的周期扰动与心脏的搏动节律

心脏的正常搏动来自心房上部的窦房结. 它的激发波先在心房中传播，引起心房的搏动. 然后从房室结沿 His 束传导，经 Purkinje 纤维发散到心室表面，引起心室的搏动. 房室结与 His 束及 Purkinje 纤维也有较慢的自节律性. 正常情况下，这种

自节律性因为节律太慢而显示不出来. 但在生理异常, 如缺血或坏死情况下, 节律会变快. 心室肌细胞在损伤电流较大情况下也会出现自发振荡. 这种自发节律也能向心室传导引起心脏的搏动, 在临床上被称为异位起搏. 许多心律失常是由异位起搏和窦性起搏共同作用引起的 [36].

对可激振子的脉冲扰动可看作是对其相位重置的过程, 可用相位延迟 $\Delta(\phi)$ 描述. 它表示在相位 ϕ 时脉冲的作用使相位延迟了 $\Delta(\phi)$. 当异位起搏点 E 与窦房结起搏点 S 之间动作电位的传导路径被阻断时, S 与 E 之间只有弱耦合. 对狗心脏的 Purkinje 纤维用蔗糖在中间隔断后, 用电流脉冲刺激一端, 表明 $0 < \phi < w$ 时, $\Delta(\phi) > 0$; $w < \phi < 1$ 时, $\Delta(\phi) < 0$. 可用一分段线性函数来表示:

$$\Delta(\phi) = \begin{cases} a\phi, & \text{当 } 0 \le \phi < w \text{ 时;} \\ b\phi - b, & \text{当 } w \le \phi \le 1 \text{ 时.} \end{cases} \tag{25.1}$$

$w \approx 0.6$, $b \approx 1.22a$, a, b 小于 1. 当 S 与 E 之间的传导路径没有被阻断时, 若窦性脉冲在 E 的不应期之内到达, 只引起 E 相位的小延迟. 若在 E 的不应期之外到达, 会引起 E 的激发, 即 E 的相位延迟等于相位本身. 用如下分段函数表示:

$$\Delta(\phi) = \begin{cases} 0, & \text{当 } 0 \le \phi \le r \text{ 时;} \\ \phi, & \text{当 } r < \phi \le 1 \text{ 时.} \end{cases} \tag{25.2}$$

r 为不应期, 是小于 1 的常数. (25.1) 称为奇重置, (25.2) 称为偶重置.

设 T_S 为窦房结的振荡周期, T_E 为异位起搏点的振荡周期. 设 $N = T_S/T_E$, 取 $T_E = 1$. 窦房结发出的电脉冲将对异位起搏点的振荡起相位重置作用. 先仅考虑窦房结与异位起搏点二

者的关系，设第 n 次窦房结脉冲作用后异位结的相位为

$$\phi_{n+1} = \phi_n + N - \Delta(\phi_n) \pmod 1. \tag{25.3}$$

但在未取与 1 的同余运算之前， $\phi_n + N$ 可能大于 1, 因此将有一次异位起搏，它也会引起心脏的搏动．如以心脏搏动时刻异位结的相位来描述心脏的搏动，即第 n 次心搏时异位点的相位为 ϕ_n, 则第 $n+1$ 次与第 $n+2$ 次心搏时异位点的相位为

$$\phi_{n+1} = \phi_n + N - \Delta(\phi_n), \qquad \text{如 } 0 < \phi_n + N < 1; \tag{25.4a}$$

$$\phi_{n+1} = 1, \qquad \text{如 } 1 < \phi_n + N < 1 + N; \tag{25.4b}$$

$$\phi_{n+2} = \phi_n + N - 1 - \Delta(\phi_n), \text{如 } 1 < \phi_n + N < 1 + N. \tag{25.4c}$$

(25.4a) 描述 S 起搏， (25.4b) 描述异位起搏， (25.4c) 描述 $1 < \phi_n + N < 1 + N$ 区间内继 (25.4b) 之后的一次 S 起搏．比较 (25.4) 的三式可见，如果把第二式的 ϕ_{n+1} 写作 $\phi_n - 1$, 它表示异位起搏，相当于运算 (mod 1), 则 (25.4c) 等价于 (25.4a), 就不必引入 ϕ_{n+2} 了．把 ϕ 作一平移 $\phi \to \phi - N$, (25.4) 成为

$$\phi_{n+1} = \begin{cases} \phi_n + N - \Delta(\phi_n), & \text{当 } 0 < \phi_n < 1 \text{ 时}; \\ \phi_n - 1, & \text{当 } 1 < \phi_n < 1 + N \text{ 时}. \end{cases} \tag{25.5}$$

现在的模空间是 $(0,\ 1+N)$. 第一式描写窦房结起搏，第二式描写异位点起搏． (25.3) 与 (25.5) 都是圆映射，奇重置即 $\Delta(\phi)$ 取 (25.1) 时圆映射的拓扑度为 1, 偶重置即 $\Delta(\phi)$ 取 (25.2) 时圆映射的拓扑度为 0. 但由于 (25.1) 与 (25.2) 都取了间断的线段近似，它们在拓扑上的差别就不明显了．

考虑心室的不应期，情况变得复杂得多．设 γ 为 S 起搏后心室响应的不应期，δ 为 E 起搏后心室响应的不应期，ε 为 S 与 E 脉冲同时起作用时所允许的 S 脉冲与 E 脉冲的最大时间间隔．分两种情况写出有关的圆映射．

(1) 异位起搏点位于心室情况

$$\phi_{n+1}=\begin{cases}\phi_n+N-\Delta(\phi_n), & 0\le\phi_n<1; & S\\ \phi_n-1, & 1\le\phi_n<1+\varepsilon N; & (ES)\\ \phi_n+N-1, & 1+\varepsilon N\le\phi_n<1+\delta N; & E*S\\ \phi_n-1, & 1+\delta N\le\phi_n<1+(1-\gamma)N; & E\\ \phi_n-1, & 1+(1-\gamma)N\le\phi_n<1+N. & *E\end{cases}\tag{25.6}$$

(2) E 不位于心室情况

$$\phi_{n+1}=\begin{cases}\phi_n+N-\Delta(\phi_n), & 0\le\phi_n<1; & S\\ \phi_n-1, & 1\le\phi_n<1+\varepsilon N; & (ES)\\ \phi_n-1, & 1+\varepsilon N\le\phi_n<1+\delta N; & E*S\\ \phi_n-1, & 1+\delta N\le\phi_n<1+(1-\gamma)N; & E\\ \phi_n-1, & 1+(1-\gamma)N\le\phi_n<1+N. & *E\end{cases}\tag{25.7}$$

S 表窦房结使心室起搏．E 表异位点使心室起搏．(ES) 表二者同时使心室起搏．$E*S$ 表 E 先使心室起搏，然后 S 脉冲到达，但此时心室处于不应期，S 不引起心搏，当 E 在心室内时也不对 E 进行相位重置，$\phi_n\to\phi_n-1+N$, 当 E 不在心室内时，S 仍会对 E 进行相位重置，$\phi_n\to\phi_n-1$, 把重置过程留给下一次迭代．$*E$ 表 E 起搏时心室处于不应期，E 不起作用．(25.6) 与 (25.7) 中把相同的函数形式也分为不同的片段是因为 (ES)、$E*S$、E 与 $*E$ 在临床表现上互不相同．

为了统计与临床应用上的方便，引入两种转数 W 与 F:

$$W=\frac{N_E+N_{*E}}{N_S+N_{*S}},\quad F=\frac{N_E}{N_S}.\tag{25.8}$$

其中 N_E 、 N_{*E} 、 N_S 与 N_{*S} 分别代表出现 E 、 $*E$ 、 S 与 $*S$ 的次数. 如 $*ESSES*ESSE*S$ 轨道 $N_E=2$ 、 $N_{*E}=2$ 、 $N_S=5$ 、 $N_{*S}=1$, 所以 $W=4/6$ 、 $F=2/5$. F 是心电图上可见的, W 则是不可见的.

把奇重置 (25.1) 称为 a, 偶重置 (25.2) 称为 b, 与情况 (1) 与 (2) 配合, 共有四种可能性 1a 、 2a 、 1b 、 2b. 取接近实验的数据 $\varepsilon=0.025$ 、 $\delta=0.625$ 、 $\gamma=0.375$, 取 N 、 a 、 r 为参数, 通过数值计算, 得到参数平面 (N,α) 与 (N,r) 上的相图 (图 25-1 与图 25-2).

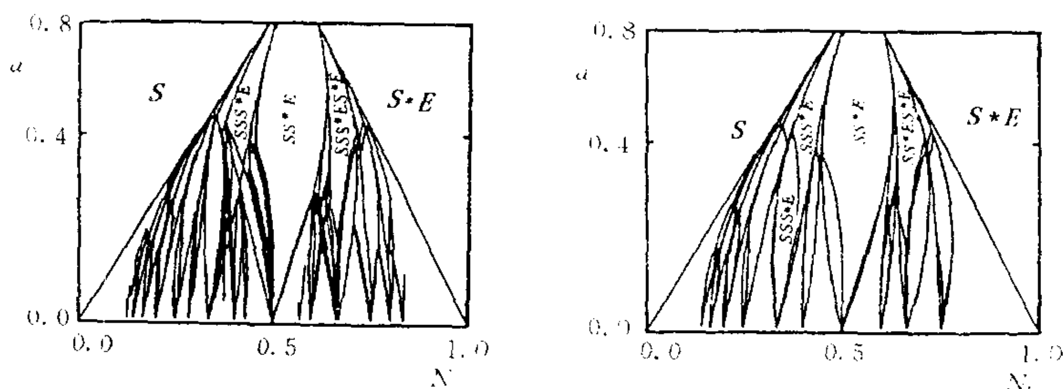


图 25-1

由图 25-1 可见, 在奇重置情况, 当耦合强度弱时, 大部分心搏模式是准周期的. 阿诺尔德舌头的规律性没正弦圆映射那么好. 在强耦合情况, $a>0.45$ 时, 主要有五种心搏节律 S 、 $S*E$ 、 $SS*E$ 、 $SSS*E$ 、 $SS*ES*E$. 这五种心律在临床上差别不大, 可看作是正常的. 1a 情况有双稳态, 如 $a=0.4$ 时, 在 $0.391<N<0.418$ 之间是 $S*ESS$ 的锁模区, $0.4024<N<0.4242$ 是 $E*SS$ 的锁模区. 2a 情况的周期模式较 1a 少, 且无双稳区.

由图 25-2 可见, 在偶重置情况, 当不应期 r 较小时, $r<0.4$, 心脏有正常的搏动模式. 异位起搏点的相位不会大于 1, 显现不

出它的存在. Purkinje 纤维、His 束与房室结都具有自节律性，但一般不会显示出来. 据此，不能认为它们是异位起搏点. 当不应期异常地长，$r > 0.5$, 心脏出现了非常的节律，参数平面上占的区域最大的模式是 $SSE*S$. 在心电图上 E 形成的 QRS 复合波形与正常的 S 产生的 QRS 复合波形差别较大，且其后的 S 起搏被掩蔽，不会引起心搏.

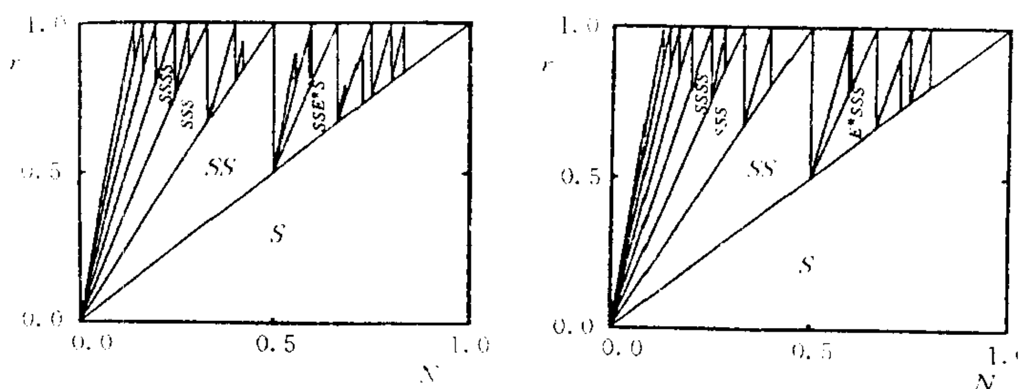


图 25-2

为了进一步深入观察异常心律，图 25-3 给出了对 1a 情况 $w = 0.55$、$\varepsilon = 0$ 的计算结果[37]. 它们的 W 值分别为 $W = 0.5$ 与 $0.667 \le W \le 0.9$. 对两种情况，都给出了 $a = 0.364$ 时的 W 与 F 随 N 的变化图.

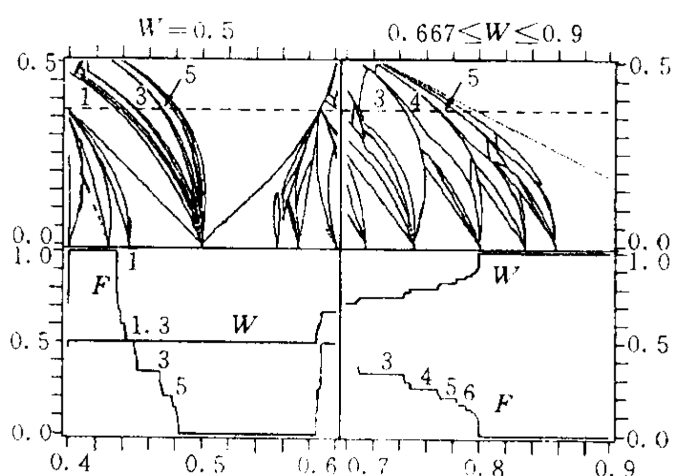


图 25-3

在给定的参数范围内，$W = 1/2$ 情况可看作是态 $E*SS$ 与 $*ESS$ 生成的法里树. 这两态的 (W, F) 值分别为 (1/2, 1/1) 与 (1/2, 0/2). 其第一代子女为 $E*SS*ESS(1/2, 1/3)$, 第二代子女为 $E*SS\,E*SS*ESS(1/2, 2/4)$ 与 $E*SS*ESS*ESS(1/2, 1/5)$, 如此等等. 在临床上还采用被

$*S$ 所隔断的 S 心律数 (NIB), 例如 $E*SS$ 为 (1), $*ESS$ 为 (0), $E*SS*ESS$ 为 (3), $E*SSE*SS*ESS$ 为 (1,3), $E*SS*ESS*ESS$ 为 (5), 等等. 对于 $W \geq 2/3$ 情况, 则可看作是 $E*SS*ES(2/3, 1/2)$ 和 $*ES(1/1, 0/1)$ 生成的法里树. 其第一代子女为 $E*SS*ES*ES(3/4, 1/3)$, 第二代子女为 $E*SS*ESE*SS*ES*ES$ (5/7,2/5) 与 $E*SS*ES*ES*ES$ (4/5,1/4). 按上述次序, 其相应的 NIB 分别为 (2) 、 (1) 、 (3) 、 (2,3) 与 (4). $W = 1/2$ 与 $W \geq 2/3$ 序列的特征是: $W = 1/2$ 情况 NIB 只出现奇数, $W \geq 2/3$ 情况则还出现偶数.

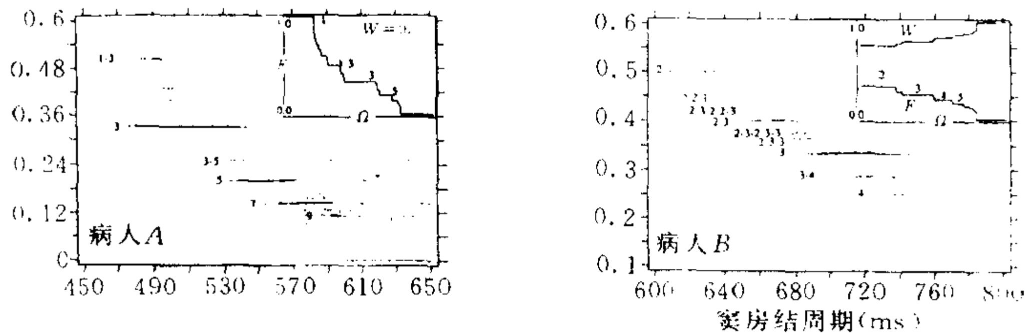


图 25-4

为了与临床情况进行比较, 测量了两个女性病人 (A 病人 6 岁, B 病人 4 个月) 的心律 [37]. 对异位早搏, 可用 RR 间隔 (记为 RR_n) 的下述判据确定:

$$RR_{n+1} - RR_n > 25 \text{ ms} \quad 和 \quad RR_{n-1} - RR_n > 15\text{ms}.$$

这些阈值明显地大于窦房结节律的涨落. 对这两个病人, 它是 5 ms. 图 25-4 给出了对这两个病人的测量结果, 它们正对应于前述的 $W = 1/2$ 与 $W > 2/3$ 的两种情况. 在临床观察中, 异位起搏点的周期是不明显的, 假设它不变, 可以用窦房结周期代替 N 为横坐标. 由于窦性心律的漂移, 心律模式将有一个分布. 图 25-4 显示了理论模拟结果与临床结果的一致性, 特别是

其 NIB 的次序与理论预言的一致性. A 病人只有奇数 NIB,B 病人则有偶数 NIB. 看来理论模型是成功的, 而且大部分频发早搏病人的心律都有复杂的魔梯结构.

§26 神经原对周期脉冲的锁相与混沌响应

生物神经细胞对电脉冲刺激的响应, 与心肌细胞对电脉冲的响应有相同的起源. 它们都来自跨细胞膜电位的除极化效应, 可由 Hodgkin-Huxley 方程描述. 但作为生物组织的一部分, 它们的表现形式却很不相同. 在数学上, 对神经原的描述, 与神经网络理论有关. 因此, 无论在生理方面或在理论模型方面, 在对心脏节律的讨论之后, 对神经原对电脉冲的响应作进一步研究仍是很有意义的.

G. Matsumoto 等在正常生理条件下用乌贼的巨轴突做过对周期电脉冲刺激响应的实验 [38]. 实验中, 巨轴突的直径约 400~700μm, 长度约 60~80 mm. 置于天然海水中. 脉冲强度 I 与周期 T 作为参数, 脉宽 300μs, 保持不变. 每次刺激少于 200 个脉冲, 中间休息 2 分钟, 轴突在作用 10000~20000 个脉冲之后被废弃. 测量了传播的与不传播的势对刺激的响应. 图 26-1 给出了测量的结果. 图中记录 (1) 是轴突的传播势对脉冲的响应. 记录 (2) 是非传播势对脉冲的响应. 在图 26-1A_1 中可见, 当电流强度是阈电流的 1.34 倍时, 记录 (1) 、 (2) 的间隔都是刺激脉冲间隔的 3 倍, 为 1:3 锁相. 记录 (4) 给出的非传播势的功率谱上有基频 f_0 与其 1/3 分频 $f_1 = 107.5$Hz. 图 26-1A_2 的流强是阈流强的 1.41 倍, 可以看到 2:6 的锁相. 它是图 26-1A_1 情况的

倍周期分岔，在功率谱上出现分频 $f_1/2$. 图 26-1B 所示情况的流强是阈流强的 1.48 倍，这时响应是无规的，非传播势的功率谱图上除 f_0 外有宽带谱.

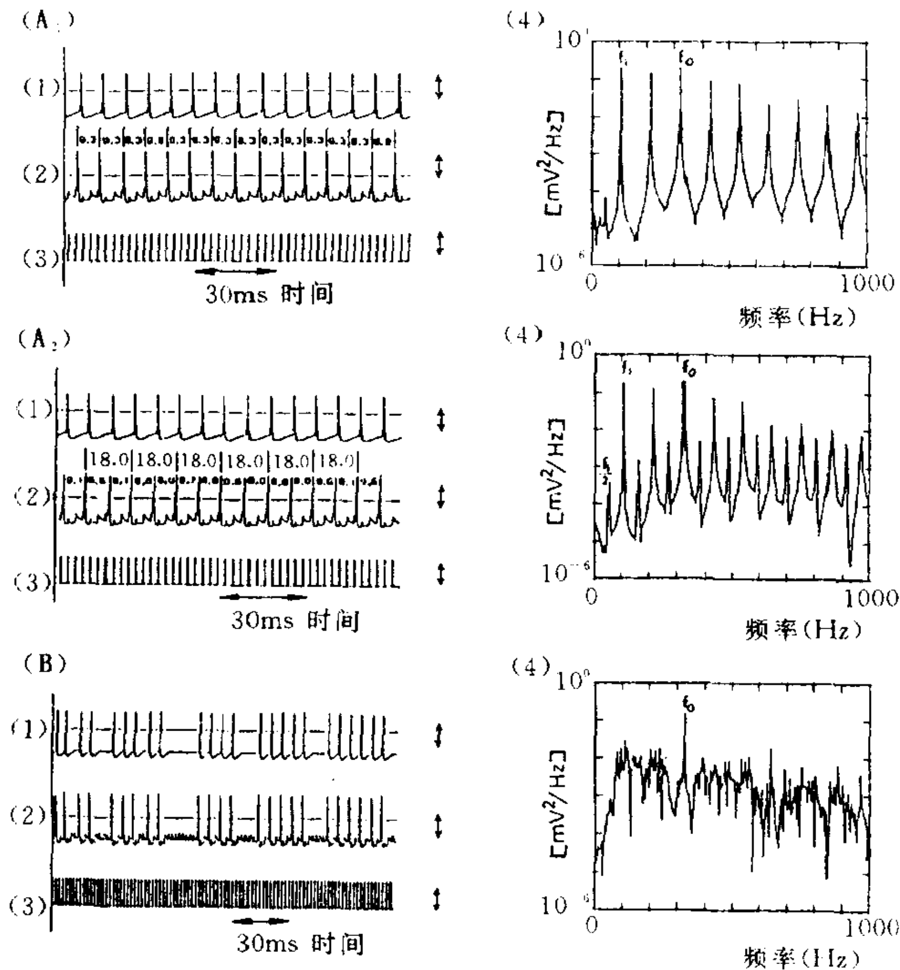


图 26-1

实验还给出了运动模式随脉冲周期 T 的变化，见图 26-2. 图中的释放率相当于圆映射中定义的转数. 图 26-2 (i) 与 (ii) 的流强相应地为 1.5 与 1.25 乘以阈流强. 图中 1 表示该周期处脉冲激发了作用势，0 表示没有激发. 1^m0^n 表示 m 个 1 之后跟着 n 个 0, 为 $m:(m+n)$ 锁相. 图 26-2(ii) 中的箭头表示在该处观察到了 2:6 锁相. 注意到 100 模与 10 模之间释放率一度下降，发现了箭头处的周期倍增，与 100 和 10 之间的混沌响应.

把乌贼的巨轴突浸在缺 Ca^{2+} 和富 Na^{+} 的海水中，可以人工地让其振荡，并对其混沌行为作过广泛的研究．现在发现的正常生理条件下轴突对周期脉冲的混沌响应，显然更值得注意，它表明了神经元的混沌行为在生理上可能具有重要意义．

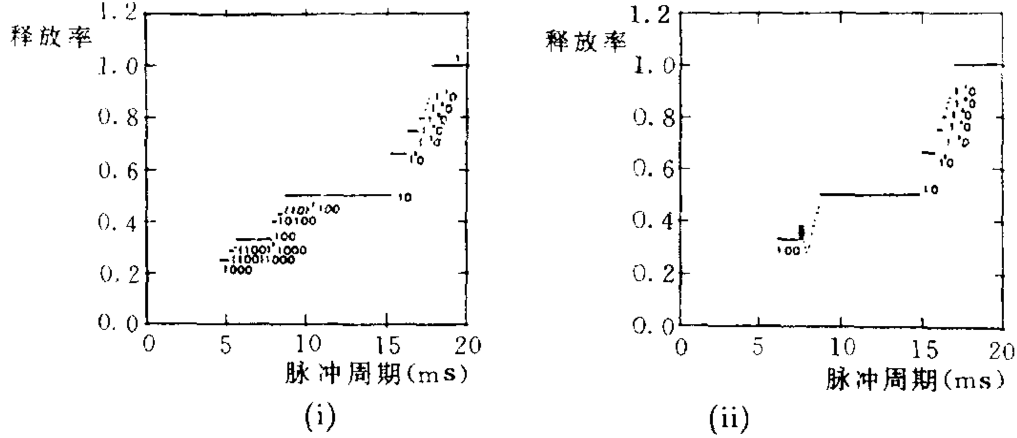


图 26-2

下面介绍一个简单的神经原模型[39]，它能定性地描述所观察到的实验现象． Nagumo 与 Sato 在 Caianiello 模型基础上分析了一个单一输出的神经元

$$x(n+1)=\theta\Big(I(n)-\alpha\sum_{r=0}^{n}k^{r}x(n-r)-I_{c}\Big), \qquad (26.1)$$

其中 $I(n)$ 是在间断时间 n 时的刺激强度， α 表示过去释放对不应性的影响， k 表示过去释放对不应性影响的衰减率， θ 是阶梯函数： $\theta(y)=1$ 如 $y\geq 0$; $\theta(y)=0$ 如 $y<0$. (26.1) 式可改写为：

$$\begin{aligned}
&y(n+1)=ky(n)-\alpha\theta(y(n))+a(n),\\
&x(n+1)=\theta(y(n+1)),\\
&a(n)=I(n)-kI(n-1)-I_{c}(1-k).
\end{aligned} \qquad (26.2)$$

如电流脉冲是等强度的，$a(n)$ 是一常数：

$$a = (I - I_c)(1 - k). \tag{26.3}$$

(26.2) 与 (26.3) 可看作是一个圆映射，其转数相当于神经元的释放率

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} x(r), \tag{26.4}$$

a 相当于正弦圆映射中的 ω 参数．容易看出，由于 $k<1$, (26.2) 与 (26.3) 只有周期轨道，将 ρ 对 a 作图，可得一完全的魔梯．

对于一个生物神经元，其输出应该是连续的．宜用 $f(y) = (1 + e^{-y/\varepsilon})^{-1}$ 函数来代替 (26.2) 中的 $\theta(y)$ 函数，

$$\begin{aligned} y(n+1) &= ky(n) - \alpha f(y(n)) + a, \\ x(n+1) &= f(y(n+1)). \end{aligned} \tag{26.5}$$

相应地，释放率的定义宜改为

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \theta\Big(x(r) - \frac{1}{2}\Big). \tag{26.6}$$

图 26-3 给出了对 $k = 0.5, \alpha = 1, \varepsilon = 0.04$ 的计算结果，图 i 为分岔图，图 ii 中李雅普诺夫指数是对 y 变量计算的．李雅普诺夫指数与平均释放率图 (图 iii) 显示了与实验观测定性一致的周期与混沌交替出现的序列．有意思的是，由 (26.5) 描述的神经原组成的神经网络会出现混沌行为．

与实验观测的不同，理论给出的图 26-3(iii) 是转数与脉冲强度 a 的关系，而不是图 26-2 中所示的转数与脉冲周期的关系．在模型 (26.2) 中，脉冲周期 T 可以通过关系 $k = e^{-T}$ 来引

入. 但是, 由于 k 是映射 (26.2) 的斜率, T 大时 k 小, 相应的转数平台宽度 ΔT 变大. 这样, 从 (26.2) 得到的 $\rho(T)$ 图将与图 26-2 很不相同, 转数 p/q ($< 1/2$) 的平台宽度比转数 $(1-p/q)$ 平台宽度小得多. 为了得到与实验一致的结果, 我们考虑下面两个修正.

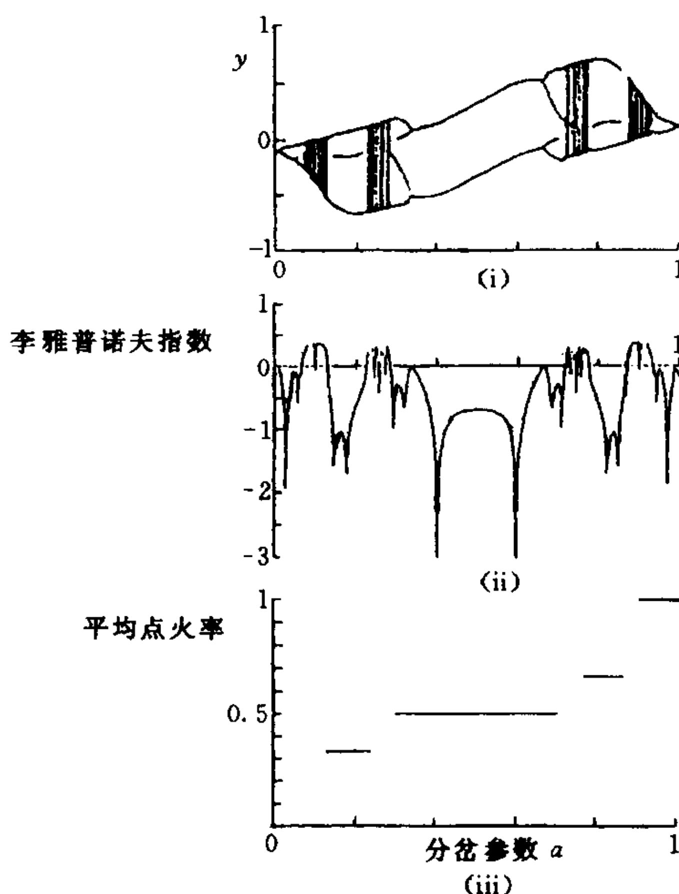


图 26-3

考虑泄漏累积分流网络模型 [56], 其膜电势由下列微分方程描述

$$\frac{dV_i}{dt} = -\frac{V_i(t)}{\tau_i} + \sum_{j=1}^{N} A_{ij}(t-t_d)[S_{ij} - V_i(t)], \quad i = 1, \cdots, N, \quad (26.7)$$

其中 $A_{ij}(t)$ 是 t 时 i 神经元收到的来自 j 神经元的输入信号, S_{ij} 是常数. t_d 是信号到达突触至膜电位发生改变之间的延迟时间. 设每一神经元只在 $t = nt_d$ 时释放, 则

$$A_{ij}(t) = g_{ij} \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nt_d)\theta(V_j(nt_d) - h_j). \quad (26.8)$$

只考虑一个神经元, $N = 1$ 的情况, 并设有外部输入, (26.7) 与 (26.8) 有解 (记 V 为 y, 并设 $h_1 = 0$)

$$y(n+1) = [ky(n) - \alpha\theta(y(n)) + a(n)]e^{\alpha\theta(y(n))/S}, \quad (26.9)$$

其中 $k = e^{-t_d/\tau_1}$, $\alpha = -g_{11}S_{11}$. 当 $S \to \infty$ 时, (26.9) 回到 (26.2) 式. 指数因子 $e^{\alpha\theta(y(n))/S}$ 是对 (26.2) 的第一个修正. 它使圆映射 (26.9) 的 R 分支的斜率比 L 分支的大, 因而转数大于 1/2(其轨道在 R 分支上的点较 L 分支上的多) 的 $\Delta T = \Delta t_d/\tau_1$ 平台宽度变小. 但这一修正仍不能得到图 26-2 中 100 轨道的宽度 ΔT 比 110 轨道的宽度 ΔT 大的结果.

我们考虑的第二个修正是引入不应期 T_r. 如设 $t = mT$ 时神经元被激发, 那么下一次激发只能在 $t - mT > T_r$ 的情况下发生. 相应地, (26.9) 式中的 $\theta(y(n))$ 应改写为

$$\theta(y(n)) \to \theta(y(n))\theta((n-m)T - T_r), \tag{26.10}$$

其中 m 为满足 $x_m = 1$ 且小于 n 之最大整数. 引入不应期使小于 1/2 转数的宽度 ΔT 延长. (26.9) 与 (26.10) 两个修正一起, 才能得到 100 轨道的 ΔT 比 110 轨道的 ΔT 比大的结果.

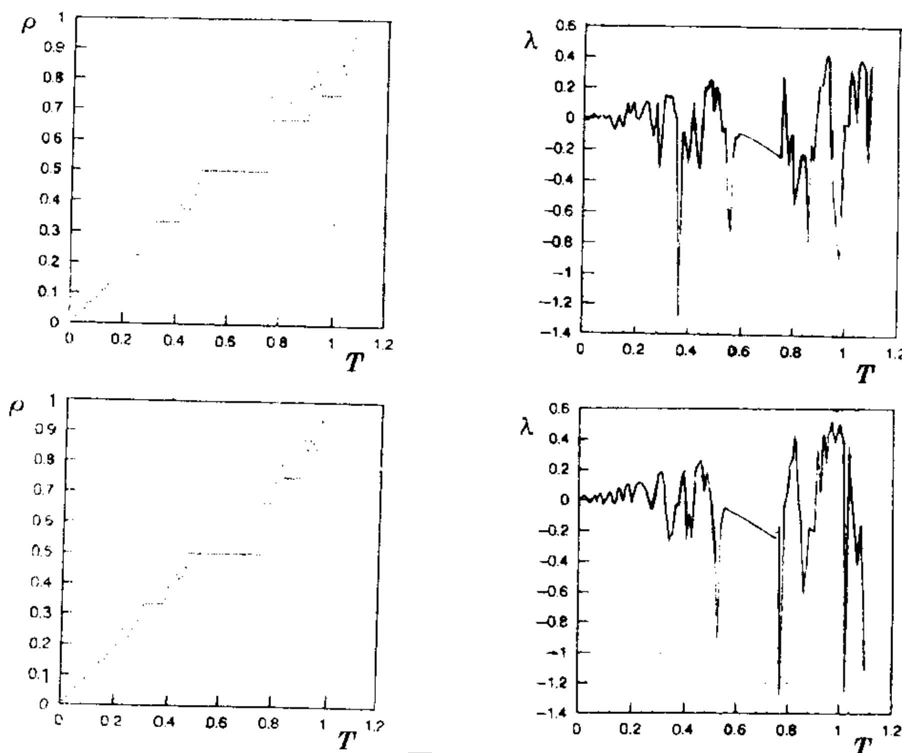


图 26-4

图 26-4 给出了考虑两个修正后的结果. 计算中, 把 (26.10) 中的第一个 θ 函数用 $f(y)$ 函数代替, 取 $\varepsilon = 0.04$, 其他参数是 $\alpha = 1$, $S = 1$, $T_r = 0.75$. T 通过 $k = e^{-T}$ 引入. 图 26-4(i)~(iv) 分别是 $I - I_C = 1.41$ 与 1.48 情况的 $\rho(T)$ 与 $\lambda(T)$ 曲线. 观察 $\rho = 1/3$ 的平台, 在其两端都发现了 $\rho = 2/6$ 与 4/12 的倍周期分岔序列. 如固定 $T = 0.4$, 增加 I, 则可观察到与实验一致的 1:3 锁相 →2:6 倍周期分岔 → 混沌的分岔序列. 这个比较说明所构造的模型是成功的, 所引入的修正是必要的.

§27 累积 - 释放模型与由准周期至完全锁相的非混沌转变

一些电子学的、化学的与生物的振荡现象, 可以用累积 - 释放模型来描述. 例如, 考虑一驱动的弛豫振子, 当其电位由阈值 $T_0 = 0$ 升至释放阈值 $T_1 = 1$ 时由下述数学模型描述: [40]

$$\dot{V} = -\gamma V + U, \quad U(t) = U_0 + U_1 \cos \omega t. \tag{27.1}$$

当 V 升达上阈值 $T_1 = 1$ 时发生电位的释放,

$$V(t) = 1 \to V(t^+) = 0. \tag{27.2}$$

这一模型可以描述某些电路, 也可以描述电流钳制的生物膜. 它导致一种圆映射.

不失普遍性, 可以假设 $\omega = 1$. 设第 n 次释放的时间为 t_n, (27.1) 的满足 $V(t_n) = 0$ 的解是

$$V(t) = \frac{U_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma(t-t_n)})$$

$$+\frac{U_1}{\gamma}\sin\beta[\sin(t+\beta)-\sin(t_n+\beta)e^{-\gamma(t-t_n)}],$$

其中 β 的定义是 $\sin\beta=\gamma/\sqrt{1+\gamma^2}$. 第 $n+1$ 次释放的时间由 $V(t_{n+1})=1$ 确定. 由此可得 t_{n+1} 与 t_n 之间的关系

$$F(t_{n+1})=F(t_n)+\frac{\gamma}{U_0}e^{\gamma t_n}. \tag{27.3}$$

F 的定义是

$$F(t)=e^{\gamma t}\left\{1-\frac{\gamma}{U_0}+\frac{U_1}{U_0}\sin\beta\sin(t+\beta)\right\}. \tag{27.4}$$

如果 F 是可逆的, 则可定义由 t_n 至 t_{n+1} 的映射

$$t_{n+1}=f(t_n), \tag{27.5}$$

其中

$$f(t)=F^{-1}\left[F(t)+\frac{\gamma}{U_0}e^{\gamma r}\right]. \tag{27.6}$$

容易看出 $f(t+2\pi)=f(t)+2\pi$, 所以 (27.5) 是一圆映射.

现在研究映射 (27.5) 随 γ 的变化. 当 $\gamma=0$ 时, 直接由 (27.1) 与 (27.2) 可得

$$t_{n+1}+\frac{U_1}{U_0}\sin t_{n+1}=t_n+\frac{U_1}{U_0}\sin t_n+\frac{1}{U_0}. \tag{27.7}$$

它相当于 (27.5) 式对 γ 展开式的一次项. 如果定义转数为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi n}t_n$, 则 (27.7) 给出的转数为 $1/2\pi U_0$. 如果明显写出调制周期的频率, $U_0\propto\omega^{-1}$, 所以 (27.7) 相当于一个简单转动, $1/U_0$ 为驱动频率, γ 对应于正弦圆映射中的耦合常数 k. 当 $\gamma=0$ 时 $1/U_0$ 轴上具有无理转数的测度为 1, 具有有理转数的测度为 0. 求微商

$$F'(t)=\gamma e^{\gamma t}\left[1-\frac{\gamma}{U_0}+\frac{U_1}{U_0}\cos t\right]. \tag{27.8}$$

它表明 $F(t)$ 在 $1-\gamma/U_0=U_1/U_0$ 时有三次拐点，即 $f(t)$ 在这时有 1/3 次拐点．当 $\gamma/U_0<1-U_1/U_0$ 时， $f(t)$ 是 t 的单值连续增函数，因此在参数空间的每一点，转数是唯一地定义的，这时只有周期与准周期运动． $1-U_1/U_0=\gamma/U_0$ 可视为临界线，在这线上 $f^{-1}(t)$ 有三次拐点．根据 Denjoy 定理，临界线上的准周期运动拓扑共轭于简单的转动，如 $f^{-1}(t)$ 有以无理数 ρ 为转数的轨道，则 $f(t)$ 有以 $-\rho$ 为转数的轨道． $f(t)$ 的准周期轨道是与 $f^{-1}(t)$ 的准周期轨道一一对应的．因此，根据对正弦圆映射的讨论，我们知道，在 $f(t)$ 的这条临界线上准周期的测度为 0, 其维数为 $D_0=0.87$, 周期轨道构成完全锁相的魔梯．

当 $1>\gamma/U_0>1-U_1/U_0(U_1/U_0<1)$ 时， $f(t)$ 是多值的，取其最低的分支作为映射 (27.5) 的唯一函数，则 $f(t)$ 是 t 单值单调增函数，但不再连续，有一间隙．单调增函数圆映射是完全锁相的．据 §X 的讨论，我们知道具有间隙的单调圆映射的准周期轨道集合的维数 $D_0=0$. 在 $1-U_1/U_0<\gamma/U_0<1$ 区间内没有混沌运动．

$f(t)$ 在 $F(t)+\dfrac{\gamma}{U_0}e^{\gamma t}$ 的微商为 0 时具有三次拐点．由此得 $U_0=U_1$, 当 $U_1/U_0>1$,$U_1/U_0>1-\gamma/U_0$ 时有混沌运动．如以 U_1 为耦合常数，随 U_1 的增加，在 $U_1/U_0=1-\gamma/U_0$ 处遇到第一条临界线，在这条线上有到完全锁相的转变，但不出现混沌．在 $U_1=U_0$ 遇到第二条临界线，在这条线上发生到混沌的转变，但 $D_0=0$ 且不再有正弦圆映射中发现的标度律．

上面的讨论都限于 $\gamma/U_0<1$, 如果 $\gamma/U_0>1$ 将发生复杂的情况， (27.3) 中 t_{n+1} 可能无解．分两种情况讨论．如 $U_1/U_0<(\gamma/U_0-1)\sqrt{1+1/\gamma^2}$ 即 $U_0/\gamma+(U_1/\gamma)\sin\beta<1$, 因此 $V(t)<1$, 始终不能达到上阈值．当 $t\to\infty$ 时 $V(t)$ 将趋向次临界的稳态

$$V(t) = U_1 \cos(t-\delta)/\sqrt{1+\gamma^2} + \gamma U_0, \quad \tan\delta \equiv \gamma^{-1}.$$

当 $U_1/U_0 > (\gamma/U_0 - 1)\sqrt{1+1/\gamma^2}$ 时情况同前，也可分两种情况，当 $U_1 < U_0$ 时是完全锁相的，当 $U_1 > U_0$ 时有混沌运动.

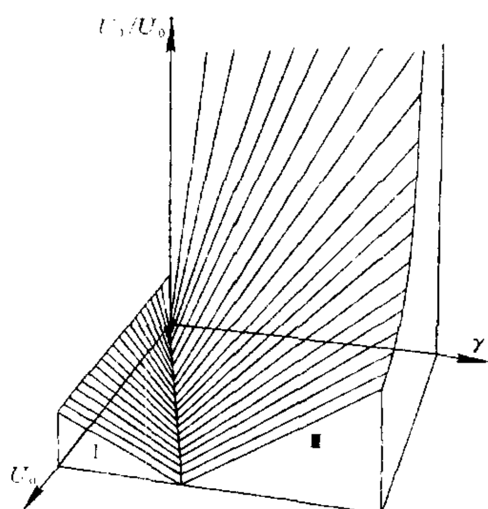


图 27-1

根据上述讨论，我们可以把 $(\gamma, U_0, U_1/U_0)$ 三维参数空间分成四个区域，如图 27-1 所示. 在区域 I, $0 \le U_1/U_0 < 1 - \gamma/U_0$, 有周期与准周期运动；在区域 III, $0 \le U_1/U_0 < (\gamma/U_0 - 1)\sqrt{1+1/\gamma^2}$, 释放过程在有限时间内停止；在区域 II, $\max[1-\gamma/U_0, (\gamma/U_0 - 1)\sqrt{1+1/\gamma^2}] < U_1/U_0 \le 1$, 有完全锁相；在区域 IV, $U_1/U_0 > \max[1, (\gamma/U_0 - 1)\sqrt{1+1/\gamma^2}]$, 出现混沌运动. 图中没有标出 II 与 IV 的分界面，它是 $U_1/U_0 = 1$.

在文献中提出过各种不同的累积 - 释放模型. 例如不同的累积方式，或把周期调制 $U_1 \cos\omega t$ 加在下阈值 $T_0 = U_1 \cos\omega t$ 上，或加在上阈值 $T_1 = 1 + U_1 \cos\omega t$ 上，结果与上面讨论的是类似的，这里不再赘述.

下面举一个实验所得的例子：以正弦波驱动运算放大器所得的弛豫振荡器[41]，其线路可参阅 § 31 图 31-1. 自由振荡频率为 252khz, 稳定到 10^{-5}, 在 16 天长期测量中的漂移为 0.5Hz/h. 改变驱动正弦波的频率与振幅，测量得到图 27-2 所示的相图. 阴影部分是周期区，部分阿诺尔德舌头的转数标在图上. 空白部分为准周期区或混沌区. 由时间序列可以确定轨道是否混沌的. 图中的

实线就是这样确定的到混沌转变的临界线. 用宽度大于 10Hz 的 287 个舌头, 定出的临界线上准周期的维数为 $D_0 = 0.795 \pm 0.005$. 在这条临界线之下相当距离处的虚线上有 $D_0 = 0.87$, 但在它的邻域没有观测到混沌. 根据本节的理论分析可知, 虚线是由有非零测度准周期到完全锁相转变的临界线, 实线则是到混沌转变的临界线. 实线上出现准周期的点集的维数应为 0, 但由于它收敛很慢, 实验测得了非零的有限值.

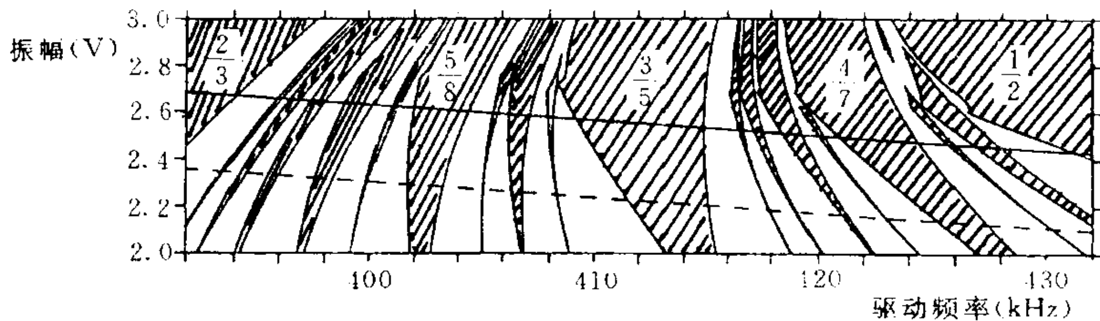


图 27-2

§28 调制弛豫振子的完全锁相与混沌

为了对累积 - 释放系统的超临界行为有一较全面的了解, 这里介绍一个简单的线段模型, 对它可以作准确的解析分析. 设累积是线性的, 上、下阈值都采用三角调制

$$\dot{V} = I, \quad 如 \quad V(t) = T_1(t) \quad 则\ V(t^+) = T_0(t); \tag{28.1}$$

$$T_0(t) = A_b M(t), \quad T_1(t) = 1 + A_t M(t), \tag{28.2}$$

其中

$$M(t) = \begin{cases} 4(t-n-1/4), & 当\ n \le t < n+1/2\ 时; \\ -4(t-n-3/4), & 当\ n+1/2 \le t < n+1\ 时, \end{cases} \tag{28.3}$$

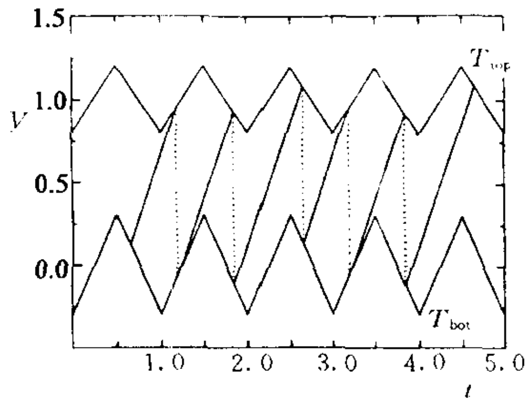


图 28-1

n 是正整数. 这个模型虽不代表某一实际系统,却包含了累积-释放系统的最重要的特征. 因为 T_0 与 T_1 有相同的周期 1, 释放时间之间的映射 $t_{n+1}=f(t_n)$ 是一圆映射 $f(t+n)=f(t)+n$. 图 28-1 给出了转数为 2/3 的轨道的一个例子 ($I=1.51$, $A_b=0.3$, $A_t=0.2$).

p/q 周期轨道 $t_0,t_1,\cdots,t_{q-1}$ 满足

$$f^{(q)}(t_0)=t_0+p. \tag{28.4}$$

轨道的稳定性与 $t_0,t_1,\cdots,t_{q-1}$ 在 $(n,n+1/2)$ 与 $(n+1/2,n+1)$ 区间的分配有关. 由图 28-2 可见, 在 $(n,n+1/2)$ 区间释放时, 两条相邻轨道的初始距离 ΔV_1 与释放以后的距离 ΔV_2 与 Δt 之间有关系

$$I\Delta t=\Delta V_1+4A_t\Delta t=\Delta V_2+4A_b\Delta t.$$

因此距离的放大因子为

$$\Lambda_+\equiv\frac{\Delta V_2}{\Delta V_1}=\frac{I-4A_b}{I-4A_t}. \tag{28.5}$$

按同样的理由, 可得在 $(n+1/2,n+1)$ 区间释放时的距离放大因子为

$$\Lambda_+=\frac{I+4A_b}{I+4A_t}. \tag{28.6}$$

如 q 个轨道点中有 q_- 个落在 $(n,n+1/2)$ 区间, q_+ 个落在 $(n+1/2,n+1)$ 区间, $q_-+q_+=q$, 则轨道的稳定性判据是

$$\Lambda(t_0)=|\Lambda_-^{q_-}\Lambda_+^{q_+}|<1. \tag{28.7}$$

根据 (28.4) 与 (28.7), 可以找出参数空间 I, A_b, A_t 的 p/q 锁相区域.

参数空间的锁相区与三个参数 (I, A_b, A_t) 都有关. 可固定 A_b 与 A_t, 找出锁相区的上限 I_u 与下限 I_t. 但是轨道的稳定性只与约化参数

$$\hat{A}_b = 4A_b/I, \quad \hat{A}_t = 4A_t/I \tag{28.8}$$

有关. 图 28-3 与表 28.1 给出了参数空间 $(\hat{A}_b, \hat{A}_t)$ 内根据 Λ_+ 与 Λ_- 的值所作的区域划分与运动情况的分类. 为了显示参数空间锁相区的三维性, 图 28-4 给出了 $A_t = 0.2$ 时 (I, A_b) 空间锁相区的分布, 图 28-5 给出了 $A_b = 0.2$ 时 (I, A_t) 空间锁相区的分布.

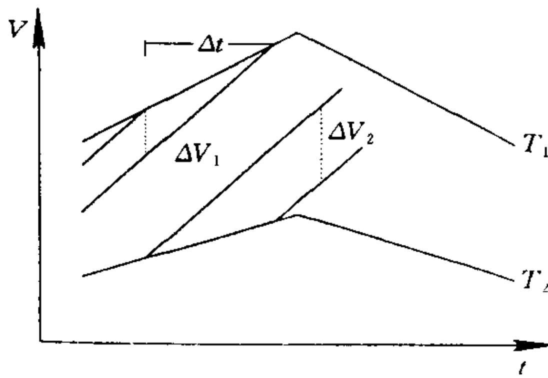


图 28-2

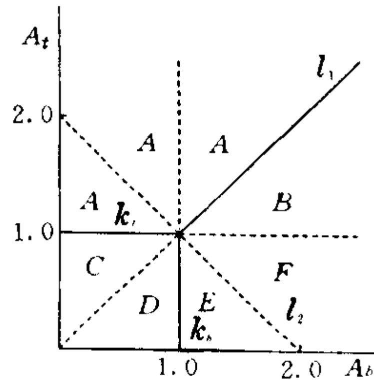


图 28-3

首先考虑 k_t 线 $\hat{A}_t = 1$ 以上的区域, $\hat{A}_t > 1$. 在这区域内, 上阈值 $T_1(t)$ 的上升部分的斜率大于 I, 它被前一周期的下降部分遮住了, 不可能在这部分发生释放. 因此, 轨道的李雅普诺夫指数是 $\ln \Lambda_+$, 它在区域 A 小于 0, 在区域 B 大于 0. A 区域是完全锁相的, B 区域的所有轨道都是混沌的. 在 l_1 线上 $\hat{A}_t = \hat{A}_b$, $\Lambda_- = \Lambda_+ = 1$, 几乎所有轨道都是准周期的. 因为在两次释放之间 V 的平均增长为 ρI, 而沿 l_1 线每次释放 V 减 1, 所以在 l_1 线上转数为 $\rho = 1/I$. 在 A 区内由于 $T_1(t)$ 的上升部分被遮挡, 在

f 映射函数上产生有关间隙，据 §13 的讨论可知，这种情况下完全锁相的魔梯的维数 $D_0 = 0$. 由 B 区经过 l_1 线到 A 区，完全锁相是突然发生的，但台阶的宽度在 l_1 的邻域随 $A_t - A_b$ 值线性增加.

表 28.1 参数空间不同区域解的类型

	区　域	Λ_-	Λ_+	运　动
A	$\hat{A}_b < \hat{A}_t, \hat{A}_t 1$	禁　戒	< 1	周　期
B	$\hat{A}_b > \hat{A}_t > 1$	禁　戒	> 1	混　沌
C	$\hat{A}_b < \hat{A}_t < 1$	> 1	< 1	周期与准周期
D	$\hat{A}_t < \hat{A}_b < 1$	$> 0, < 1$	> 1	周期与准周期
E	$\hat{A}_t < 1 < \hat{A}_b, \hat{A}_t + \hat{A}_b < 2$	$< 0, > -1$	> 1	周期与混沌
F	$\hat{A}_t < 1 < \hat{A}_b, \hat{A}_t + \hat{A}_b > 2$	< -1	> 1	混　沌

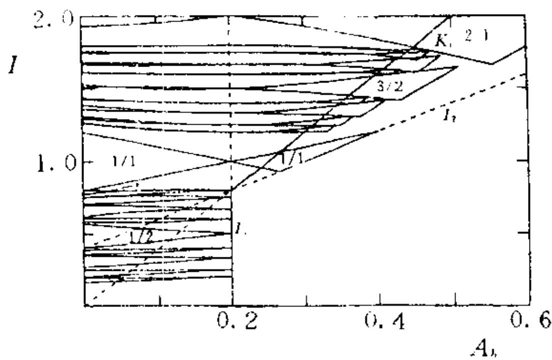


图 28-4

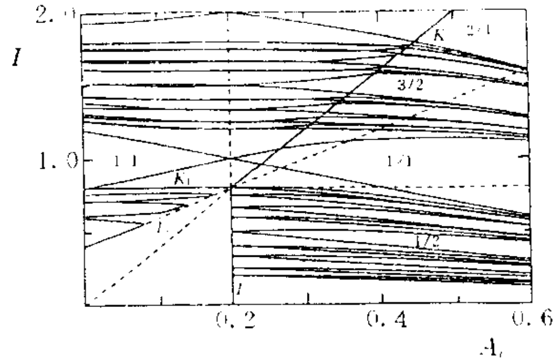


图 28-5

当 $\hat{A}_t < 1$ 时，释放可以在任何时间发生，我们把这区域分成 C~ F 四个小区. 在区域 D 内 $\hat{A}_t < \hat{A}_b < 1$, 我们有 $\Lambda_+ > 1$ 与 $0 < \Lambda_- < 1$, 使得可能存在周期与准周期轨道. 在台阶的下 (上) 边界 $I_l(I_u)$ 处，周期吸引子在 $t_0 = n + 1/2(t_0 = n)$ 时释放，这时调制具有极大 (极小) 值. 当 t_0 越过 $n + 1/2(n)$ 时， q_+ 加 1 而 q_- 减 1, 使得稳定性判据 (28.7) 不再成立. 由 l_1 线出发，随着 $\hat{A}_b$ 的增加，出现锁相台阶，至 k_b 线 $\hat{A}_b = 1$ 处变成完全锁相的. 锁相区成水漏形，在 l_1 与 k_b 之间某些点上台阶宽度变成 0. 在 k_b 线上下阈值 $T_1(t)$ 上升部分的斜率为 I. k_b 上魔梯的分维也是 0.

在区域 E, $\hat{A}_t < 1 < \hat{A}_b$, $\hat{A}_t + \hat{A}_b < 2$, 锁相区可能发生重叠. 如同在 D 区, 锁相区的上边界 I_u 由 $t_0 = n$ 给出, 而下边界 I_l 只在 k_b 附近由 $t_0 = n + 1/2$ 给出. 随 $\hat{A}_b$ 增加, I_u 上升, 但下边界 I_l 只减到 t_0 遇到 $n+1/2$, 然后出现一膝盖, 然后增加碰到 I_u, 锁相区结束. 在 l_2 线 $\hat{A}_t + \hat{A}_b = 2$ 上 $\Lambda_- = -1$, 所有锁相区都消失.

在 F 区 $\hat{A}_t < 1 < \hat{A}_b$, $\hat{A}_t + \hat{A}_b > 2$, 我们有 $\Lambda_- < -1$ 与 $\Lambda_+ > 1$, 所有吸引子都是混沌的. 在 C 区, $\hat{A}_b < \hat{A}_t < 1$, 情况与 D 类似, 只是现在 I_l 对应于 $t_0 = n$, I_u 对应于 $t_0 = n + 1/2$, 存在周期与准周期吸引子, 锁相区是水漏形的.

图 28-6 给出了 $I = 10/9$, $A_t = 0.2$(即 $\hat{A}_t < 1$) 情况以 V_n 表示的吸引子随 A_b 的变化. 在 D 区 $0.2 < A_b < 0.277$ 看到了准周期与锁相, 在 E 区 $0.277 < A_b < 0.355$ 有锁相与混沌, 在 F 区 $A_b > 0.355$, 则只有混沌.

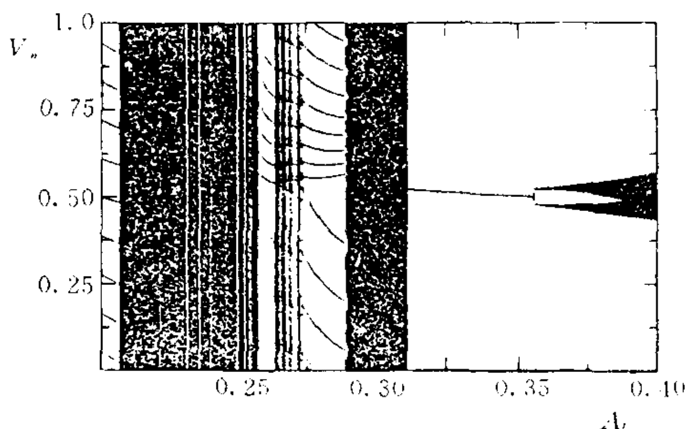


图 28-6

考虑 V_{n+1} 作为 V_n 函数的庞加莱映射, V_n 取在 $n + 1/4$ 处以使 V_n 处于 [0,1] 区间. 为简单起见, 设 $\rho < 1$, 则在 1 周期内可能有一次释放或没有释放. 庞加莱映射分为两支, 上分支对应于没有释放, 下分支对应于释放一次. 图 28-7 给出了参数空间不同区域中庞加莱映射的一些例子. 折点 P_1 与 P_2 由 $t = n$ 与 $n + 1/2$ 决定,

$$P_1 = (1 + A_t - 3I/4, I/4 + A_b),$$

$$P_2 = (1 - A_t - I/4, 3I/4 - A_b). \tag{28.9}$$

注意到它们的 V_n 与 A_b 无关， V_{n+1} 与 A_t 无关.

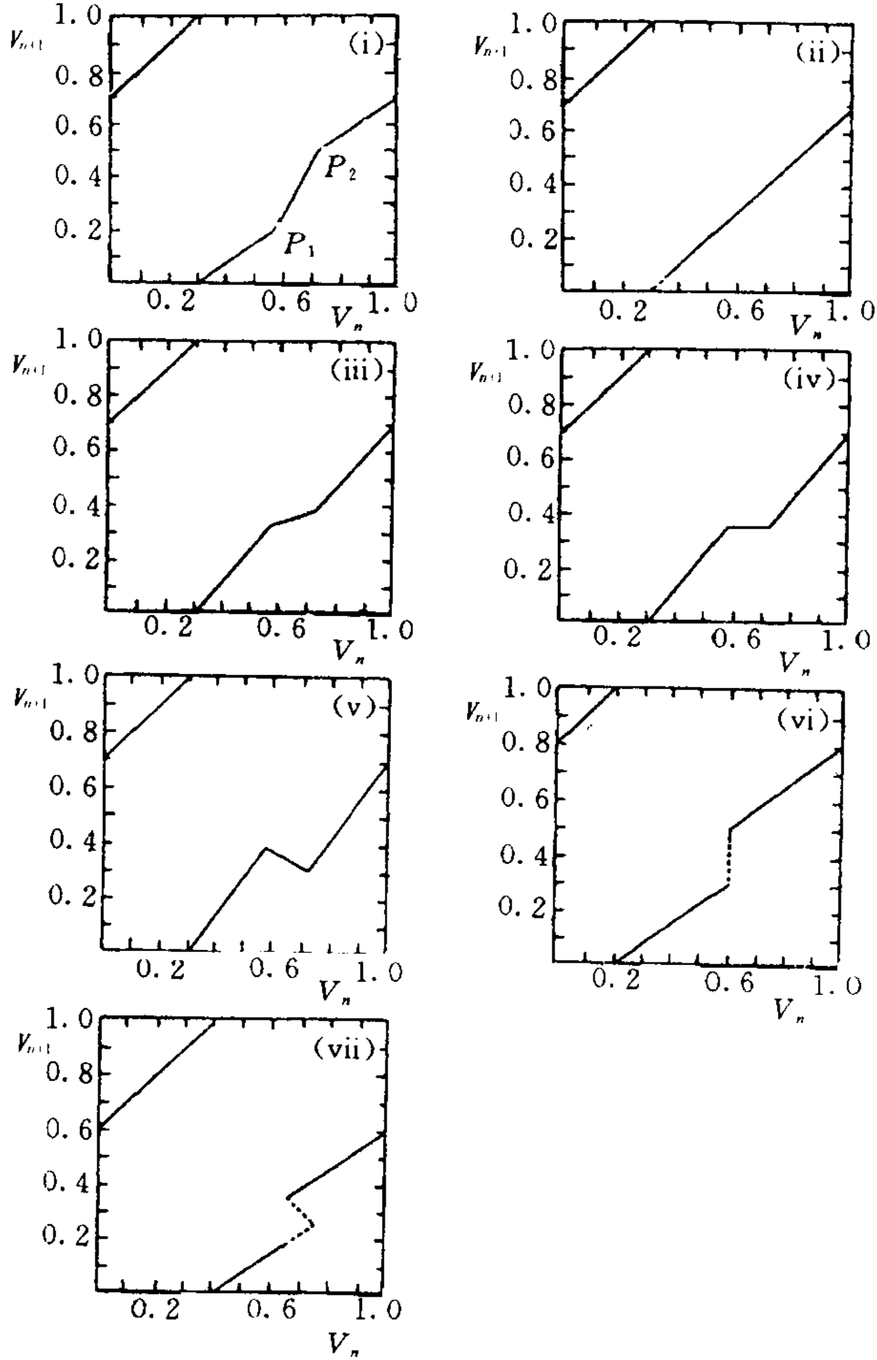


图 28-7

假设 $\hat{A}_t < 1$(图 28-7(i)~(v)). 由 C 区开始, 在 C 区内 $\Lambda_- > 1$, $0 < \Lambda_+ < 1$, 映射是 $1-1$ 的. 随 A_b 的增加, 两者的斜率都趋向 1, 在 l_1 线上准确地为 1. 在 D 区内 $\Lambda_+ > 1$ 增加, $0 < \Lambda_- < 1$ 减小, 映射仍是 $1-1$ 的, 直至到达 k_b 线. 在 k_b 线上斜率 Λ_- 变为 0, P_1 与 P_2 点的 V_{n+1} 都为 $2A_b$, 映射变为不可逆的. 在 E 区, Λ_- 变为负的而 Λ_+ 继续增加, 不同转数的轨道可以共存, 也可能与混沌轨道共存. 随 A_b 进一步的增加, 在 l_2 线上 $\Lambda_- = -1$.

如上面已经提及, 在 C 区映射是 $1-1$ 的, 随 A_t 的增加, P_1 与 P_2 点的 V_n 坐标互相靠拢, Λ_- 趋向发散. 在 k_t 线上 (图 28-7(vi)), P_1 与 P_2 点的 V_n 坐标变成相同的, 在庞加莱下分支上 $V_n = 1 - 2A_t$ 处出现一个间隙. 在区域 A(图 28-7(vii)), P_1 的 V_n 坐标超过 P_2 的, 庞加莱映射变成多值的. 但由上阈值处的遮盖效应, 使其实际上是单值的. 在 k_t 线上, 间隙突然地变成 $2(A_t - A_b)$, 并随进入 A 区而继续增加. 存在间隙意味着吸引子的庞加莱映射有无限多的不可及区域.

上面的分析给出了相图的全面的概念. 特别是给出了临界线 k_t 与 k_b, 它们分别与到完全锁相及到混沌的转变相联系. l_1 线也是区分完全锁相与混沌区的分界线. 在图 28-4 中 k_t 线几乎平行锁相区的边界, 在图 28-5 中则反之, k_b 线几乎平行锁相区的边界, 这样的临界线很难看到.

把三角调制换成正弦调制 $M(t) = \sin(2\pi t)$, 系统的行为只有细节的变化, 参数空间的整体结构保持不变. 参数空间被临界线 $\hat{A}_b = 1$ 与 $\hat{A}_t = 1$ 分成区域, 现在 $\hat{A}_b = 2\pi A_b/I$, $\hat{A}_t = 2\pi A_t/I$. 在 D 区, 水漏形的锁相区将变成单调增加的, 但是轨道仍是周期和准周期的, 庞加莱映射仍是一一的. l_1 线上锁相区测度仍是 0, 至 k_b 仍完全锁相, 分维为 $D_0 = 0.87$, 庞加莱映射有水平

拐点．在 E 区，锁相区发生重叠，出现圆映射中已知的复杂现象．在 A 区，庞加莱映射存在间隙，有完全锁相且 $D_0 = 0$. 接近 k_t 处间隙随与 k_t 的距离成平方根关系增长．在 B 区，所有吸引子仍是混沌的．在 l_1 线上，$\rho = 1/I$, 它是 B 区与完全锁相区 A 的分界线．

第 6 章

环 面 映 射

在本书的开头，我们就提到过茹厄勒 - 塔肯斯定理 [2] 与 Newhouse- 茹厄勒 - 塔肯斯定理 [3]. 这些定理说，给定一个三频准周期吸引子，则任意小的 C^2 微扰都能使其转变成结构稳定的奇怪吸引子；而对四频或更多频率的吸引子，任意小的 C^∞ 微扰能达到同样的效果. 对于二频问题，我们已经看到，有限的微扰才能使准周期吸引子变为混沌吸引子. 但是皮索杜定理认为，二频准周期是结构不稳定的，任意小的微扰能将它破坏变成结构稳定的周期吸引子. 实际上情况并不那么简单，如阿诺尔德指出并在本书前面已经看到的那样，随微扰的增加，准周期吸引子逐步减少，周期吸引子逐步增加. Newhouse- 茹厄勒 - 塔肯斯定理遇到的情况也是类似的，只有选择很特殊的微扰才可能在无限小邻域使准周期转变为混沌. 本章将用耦合圆映射或称环面映射和准周期强迫圆映射来研究多频问题. 它们是圆映射的自然推广.

§29 环面映射与其共振区

环面映射 $\boldsymbol{f}: T^n \to T^n$ 是圆映射的自然推广，圆映射是环

面映射 $n=1$ 的特例. 本章讨论 $n\geq 2$ 的情况 [43]. 正如圆是实数集合与整数集合的商 $T=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, 定义投影算符 $\pi:\mathbb{R}^n\to T^n$, $\pi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\bmod \mathbb{Z}^n$, $\boldsymbol{f}$ 的提升是连续映射 $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, 它满足

$$\pi\circ\boldsymbol{F}=\boldsymbol{f}\circ\pi. \tag{29.1}$$

如同圆映射, 设其拓扑度为 1, 则

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{m}. \qquad \boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^n \tag{29.2}$$

$\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 的描述是等价的, 如同圆映射中我们曾经做过的那样, 我们将不区别 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{F}$.

对一环面映射, 如果

$$\boldsymbol{f}^{(q)}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}, \qquad q\in\mathbb{N},\quad \boldsymbol{p}\in\mathbb{Z}^n \tag{29.3}$$

则我们说它是周期的, 其周期为 q, 具有转矢 $\boldsymbol{p}/q$. 如把与转矢关系最直接的参数集合 $\boldsymbol{\omega}\in\mathbb{R}^n$ 写出来,

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}). \tag{29.4}$$

举一个 $n=2$ 的例子.

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\Big(-\frac{k}{2\pi}\sin 2\pi y,-\frac{k}{2\pi}\sin 2\pi x\Big). \tag{29.5}$$

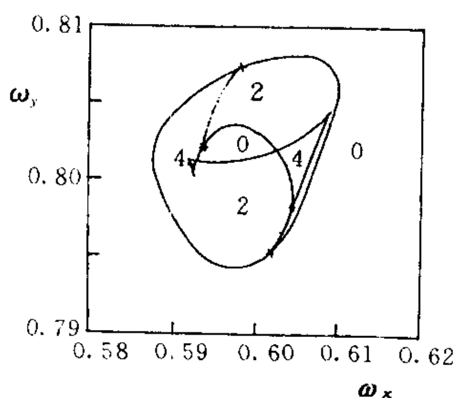


图 29-1

$k=0.7$ 时有转矢为 $\boldsymbol{p}/q=(3,4)/5$ 的周期运动. 图 29-1 给出了 (ω_x,ω_y) 平面上的共振区, 图中的数字表示该区域内解的数目, 容易看出, 这是一个二维环面在平面上的投影. 这个结论具有普遍性, 可以一般地予以证明.

$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, 设映射 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}) \to \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{x})$ 是连续可微的, $\boldsymbol{\omega} \to \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{x})$ 对每一 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 内的一个微分同胚, 显然 (29.4) 满足这些条件. 设 $\boldsymbol{p}$ 为 (29.4) 满足 (29.3) 的转矢为 $\boldsymbol{p}/q$ 的解的集合, 如果 $q=1$, 或 $q>1$ 而 $\boldsymbol{f}$ 在 C^1 内充分接近于平移, 则 $\boldsymbol{p}$ 微分同胚于环面 T^n. 在 $q=1$ 时, 因为 $\boldsymbol{\omega} \to \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{x})$ 对每一 $\boldsymbol{x}$ 是一微分同胚, 记周期轨道解为 $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$, 它为 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 空间中 $\mathbb{R}^n$ 上的图形, 与 $\mathbb{R}^n$ 同胚, 其 π 投影 $\boldsymbol{P}$ 为 T^n, 所以 $\boldsymbol{P}$ 微分同胚于 T^n. 当 $q>1$ 而 $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{x})$ 充分接近平移时 (相当于圆映射 $f'(x)>0$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 的情况), $\boldsymbol{\omega} \to \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\omega}}^{(q)}(\boldsymbol{x})$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个微分同胚, 所以 $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\omega}}^{(q)}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}$ 的解集也与 $\mathbb{R}^n$ 同胚, 其 π 投影 $\boldsymbol{P}$ 与 T^n 同胚. 图 29-1 为 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})$ 空间中的 T^2 在 $\boldsymbol{\omega}$ 平面上的投影.

下面我们着重研究 $n=2$ 共振区内部的结构. 图 29-1 的特征是存在鞍结点的曲线与尖点. 在参数 $\boldsymbol{\omega}$ 值的鞍结点处 $\boldsymbol{p}/q$ 的轨道的 $d_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\omega}}^{(q)}(\boldsymbol{x})$ 矩阵有本征值 +1, 它是共振区的边界. 容易看出, 鞍结点也就是 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})$ 空间的解集 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$ 向 $\boldsymbol{\omega}$ 空间投影时奇异点的象, 在这些点处 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$ 的切矢量 $(\delta\boldsymbol{x},\delta\boldsymbol{\omega})$ 有 $\delta\boldsymbol{\omega}=0$, $\delta\boldsymbol{x}\neq 0$. 这是因为 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\omega}}^{(q)}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}$ 的解, $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$ 的切矢量决定于 $d_{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\omega}}^{(q)}(\boldsymbol{x})\delta\boldsymbol{\omega}+d_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\omega}}^{(q)}(\boldsymbol{x})\delta\boldsymbol{x}=\delta\boldsymbol{x}$, 所以当且仅当 $\delta\boldsymbol{\omega}=0$ 时 $d_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\omega}}^{(q)}(\boldsymbol{x})$ 有本征值 +1, $\delta\boldsymbol{x}$ 为对应的本征矢.

在所有共振区中都看到了双 +1 本征值点. 这是共振区的一般现象, 对它有如下的定理. 设 $\boldsymbol{f}$ 对 $\boldsymbol{\omega}$ 在内积 $\langle d_{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{f}\delta\boldsymbol{\omega},\delta\boldsymbol{\omega}\rangle \geq 0$ $(\forall\delta\boldsymbol{\omega})$ 意义上是单调的, 设 Γ 是周期 1 的 C^1 鞍结点曲线, 它是闭的, 同伦上非平庸的, 在参数空间投影非奇异的, 则在 Γ 曲线上至少存在两个点, 这些点上 $d_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}$ 有双重本征值 +1. 这定理可证明如下. 设 $(\delta\boldsymbol{x},\delta\boldsymbol{\omega})$ 为 Γ 曲线的切矢量, $d_{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{f}\delta\boldsymbol{\omega}+d_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}\delta\boldsymbol{x}=\delta\boldsymbol{x}$, 因

为投影非异 (Γ 曲线的切矢量不垂直于参数空间), 所以 $\delta\omega \neq 0$, $d_{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{f}$ 是可逆的, $d_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}\delta\boldsymbol{x} \neq \delta\boldsymbol{x}$. 因此 $d_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}$ 的本征值为 $+1$ 的本征空间 K 是一维的, 并且不包含 $\delta\boldsymbol{x}$. 它沿 Γ 连续地变化. 因为 $\boldsymbol{\omega} \to \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{x})$ 是一微分同胚, Γ 在 $\boldsymbol{x}$ 空间的投影是不自交的. $\pi\Gamma$ 同伦不平庸是指其 x_i $(i=1,2)$ 起止于 (0, 1) 的端点, 不能收缩为 0, 如图 29-2 所示, 它是图 29-1 所示共振区在 $\boldsymbol{x}$ 空间的投影. $\delta\boldsymbol{x}$ 沿着它无净的转动. 另一方面, $\delta\boldsymbol{x}$ 沿 $\pi\Gamma$ 净转一周. 据假设 $\boldsymbol{f}$ 对 $\boldsymbol{\omega}$ 是单调的, 因此 $d_{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{f}\delta\boldsymbol{\omega}$ 也净转一周, 在 Γ 线上至少有两个点使 $d_{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{f}\delta\omega \in K$, 在该处 $d_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}\delta\boldsymbol{x} - \delta\boldsymbol{x} \in K$. 即 $d_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}$ 有另一本征值为 $+1$ 的本征函数.

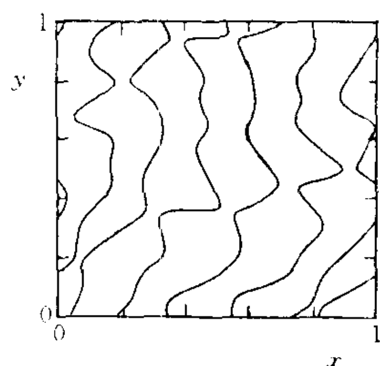


图 29-2

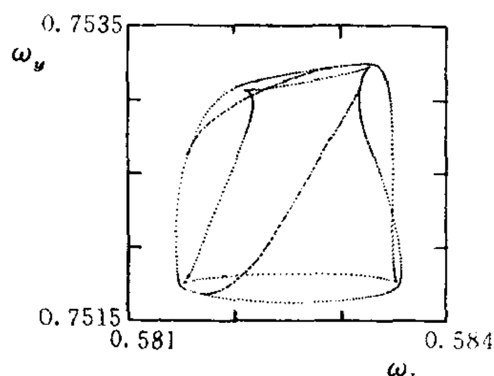


图 29-3

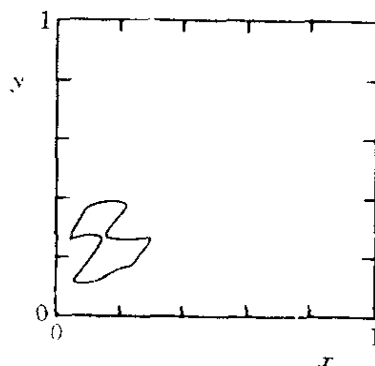


图 29-4

当 $q>1$ 时, 只要 $\boldsymbol{f}$ 充分接近于平移, $\boldsymbol{f}^{(q)}$ 对 $\boldsymbol{\omega}$ 是单调的, 上述结论仍然成立. 鞍结线把参数空间分成 $\det(d_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f} - id)$ 符号不同的部分. 因此, 如果有一同伦不平庸的鞍结线, 则必有另一条这样的曲线. 如果它们的投影都是非异的, 则它们各自都有两个双 $+1$ 本征值点. 图 29-1 就属于这种情况. 图中打 × 的点就是双 $+1$ 本征值点. 但是也存在许多共振区的例子,

它们只有同伦平庸的鞍结线. 例如图 29-3 所示的 $k = 0.7$ 时的 (7, 9)/12 共振区, 它没有空洞与燕尾. 图 29-4 是它在 (x,y) 平面上的投影.

由于拓扑度守恒, 经过鞍结线时产生一对鞍结不动点. 在双 +1 本征值点的邻域将发生如下现象. 在这点发出一条霍普夫分岔曲线, 它在这点与鞍结线二次相切. 结点在霍普夫线上有互为复共轭的本征值. 在其一边, 不动点形成鞍汇对, 在另一边形成鞍源对. 从双 +1 本征值点还发出一同宿楔, 其边界与鞍结线二次相切, 互相无限次相切. 在楔内, 鞍点的稳定与不稳定流形发生同宿相交. 图 29-5 给出了上述情况的示意图. 图 29-6 是图 29-1 有关部分的放大, 它显示了 (3, 4)/5 共振区中的有关结构, 其同宿楔如此地窄, 以至在图上看起来是一条线. 图 29-7(i) 、 (ii) 、 (iii) 、 (iv) 给出了图 29-6 中所示路径上四个点上的相图. 图 29-7(iv) 给出了一个同宿相交的例子, 它表明像保面积二维映射情况一样, 当映射是可逆的时候也会出现混沌.

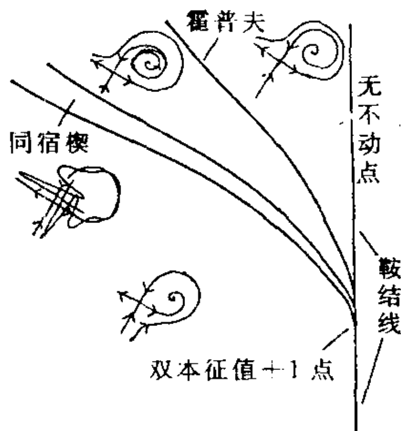


图 29-5

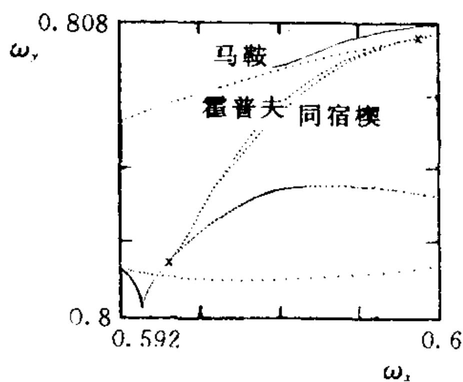


图 29-6

由上面的讨论可见, 三频问题中共振区的结构要比二频问题中复杂得多. 我们看到, 在共振区中, 可能由同宿相交, 在

k 值很小时就产生混沌. 共振区的结构对不同共振区没有明显的相似性. 上面没有提到, 当 k 增大时, 在共振区中也可能出现倍周期分岔区. 这些都与圆映射情况不同. 以后我们还将看到, 由于多频问题中出现了多种不同的运动形式, 对它们的研究远没有像对二频问题的研究那么成熟.

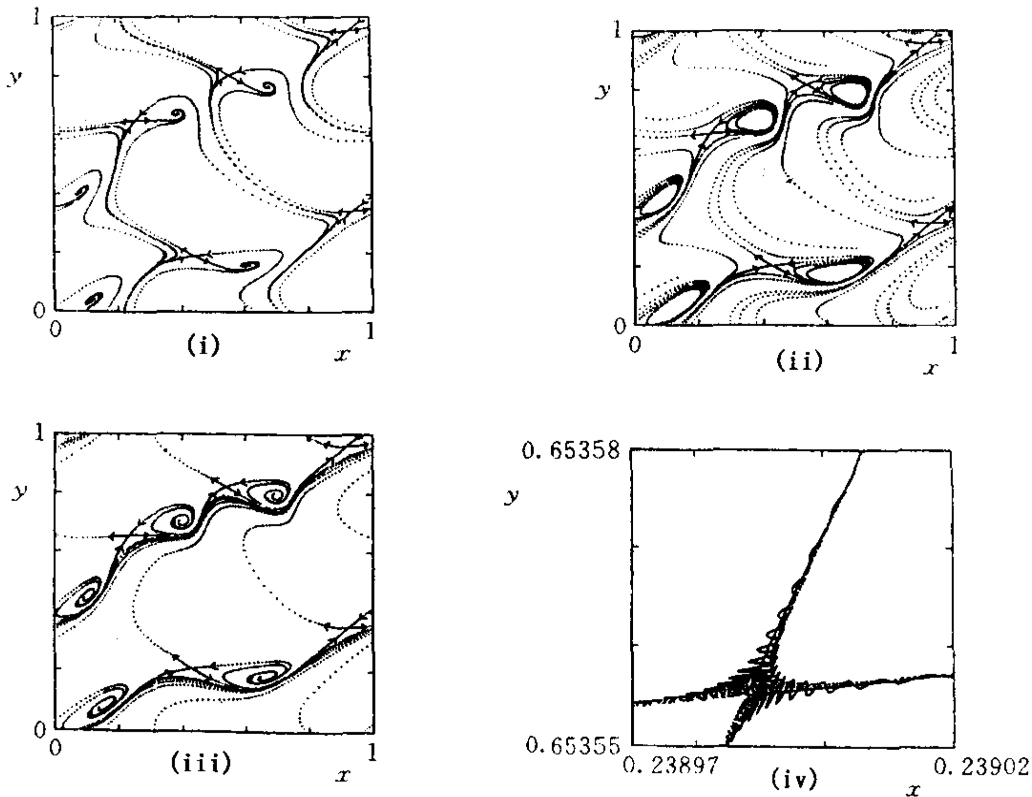


图 29-7

§30 关于环面映射的数值实验

从前节的讨论可见, 要给出环面映射的相空间与参数空间完全描述是困难的. 因此, 本节将介绍 C. Grebogi, E. Ott 与 J.A. Yorke 有关二维与三维环面上数值实验的结果 [44], 它将给出有关准周期向混沌转变的总体概况.

考虑二维环面映射 (29.4). 其 $g(x)$ 函数为

$$g_i(x,y) = \frac{\varepsilon}{2\pi}\sum_{r,s} A_{r,s}^{(i)} \sin[2\pi(rx + sy + B_{r,s}^{(i)})], \tag{30.1}$$

其中 $i = 1,2$, (r,s) 为整数对, 我们将只取低阶项. 表 30.1 给出了一组 (r,s) 及用随机数发生器产生的参数 $A_{r,s}^{(i)}$ 、 $B_{r,s}^{(i)}$. 下面的结果都是针对这一组参数得到的. 用其他的 (r,s) 组合与随机选择的 A,B 系数可得到相似的结果. 如所定义的映射的雅可比行列式 $J \neq 0$, 映射是可逆的, 对表 30.1 所给的系数, 这存在于 $\varepsilon < \varepsilon_c \approx 0.673$. 当 $\varepsilon > \varepsilon_c$ 时, 映射是不可逆的. 三频准周期只发生于 $\varepsilon < \varepsilon_c$ 时, 否则不可能把它变换成平移. 对所讨论的二维映射, 存在四种不同的吸引子: 三频准周期, 二频准周期, 周期与混沌. 可用李雅普诺夫指数来判断吸引子属于那一种类型的. 设李雅普诺夫指数 λ_1 与 λ_2 按顺序 $\lambda_1 \geq \lambda_2$ 设定, 则 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 为三频准周期, 其一为 0 另一小于 0 的为二频准周期, 两者都小于 0 的为周期, 有一个或二个大于 0 的为混沌. 在实际计算中, 10^{-4} 即看作为 0. $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{1/2} < 10^{-4}$ 为三频准周期, $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{1/2} > 10^{-4}$ 且 $|\lambda_1| < 10^{-4}$ 为二频准周期, $\lambda_1, \lambda_2 < 10^{-4}$ 为周期, $\lambda_1 > 10^{-4}$ 为混沌. 表 30.2 给出了对 $\varepsilon/\varepsilon_c = 3/16$ 时 (ω_1, ω_2) 作 512 次随机选择与其他 $\varepsilon/\varepsilon_c$ 值时 (ω_1, ω_2) 作 256 次随机选择统计的结果. 在计算 λ 值时, 对 $\varepsilon/\varepsilon_c = 3/16$ 情况对每一随机选择作 2×10^5 迭代, 其他 $\varepsilon/\varepsilon_c$ 值时作 10^5 迭代. 对满足 $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{1/2} < 10^4$ 的轨道作进一步的迭代, 表明其李雅普诺夫指数确实趋向 0. 用求得的转矢作平移映射, 它与原相图存在一一对应关系, 这也表明确实存在一个非线性变换, 能将三频准周期变换成为二维平移. 因此表 30.2 的

结果是可信的，它表明三频准周期的测度在 $(0,\varepsilon_c)$ 区域内由 1 变为 0.

表 30.1

(r,s)	$A^{(1)}_{r,s}$	$B^{(1)}_{r,s}$
(1, 0)	−0.26813663648754	0.98546084298505
(0, 1)	−0.91067559396390	0.50446045609351
(1, 1)	0.31172026382793	0.94707472523078
(1, −1)	−0.04003977835470	0.23350105508507
(r,s)	$A^{(2)}_{r,s}$	$B^{(2)}_{rs}$
(1, 0)	0.08818611671542	0.99030722865609
(0, 1)	−0.56502889980448	0.33630697012268
(1, 1)	0.16299548727086	0.29804921230971
(1, −1)	−0.80398881978155	0.15506467277737

表 30.2

吸引子	$\varepsilon/\varepsilon_c=3/16$	$\varepsilon/\varepsilon_c=3/8$	$\varepsilon/\varepsilon_c=3/4$	$\varepsilon/\varepsilon_c=9/8$
三频	92%	82%	44%	0%
二频	8%	16%	38%	33%
周期	2%	2%	11%	31%
混沌	0%	0%	7%	36%

为了使对 (ω_1,ω_2) 平面上不同吸引子出现的位置有个概念，图 30-1 给出了 $\varepsilon/\varepsilon_c=3/4$ $(\varepsilon=0.5)$ 时 64×64 格点上四种吸引子的分布情况. 三频准周期的点画在图 30-1(i) 上，二频准周期画在 (ii) 上，周期画在 (iii) 上，混沌吸引子画在 (iv) 上. 可以看到，对角线上很少有三频准周期. 二频准周期则在 $\omega_1=\omega_2$ 线上较密，但也分布在整个平面上. 周期运动则在 $(\omega_1,\omega_2)=(1/2,1/2)$, (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1) 的邻域有最高的密度，对角线上次之. 混沌运动则集中在周期运动密集区的边上.

下面讨论吸引子的一些特征. 首先看一下李雅普诺夫指数的分布. 图 30-2(i) 给出了 (λ_1,λ_2) 平面上 $\varepsilon/\varepsilon_c=3/4$ 时对 (ω_1,ω_2) 的 4096 次随机选择作 10^4 次迭代所得的李雅普诺夫指数的分布，图 30-2(ii) 是其局部的放大. 图中 $\lambda_1=0$, $\lambda_2<0$ 对应于二频准周期轨道. $\lambda_1=\lambda_2<0$ 相应于周期轨道，两者相等说明

线性化映射的本征值是复共轭的. 混沌轨道则密集在 $\lambda_1 = -\lambda_2$ 附近, 准确地说它们密集在 $\lambda_1 = -\lambda_2$ 直线之下.

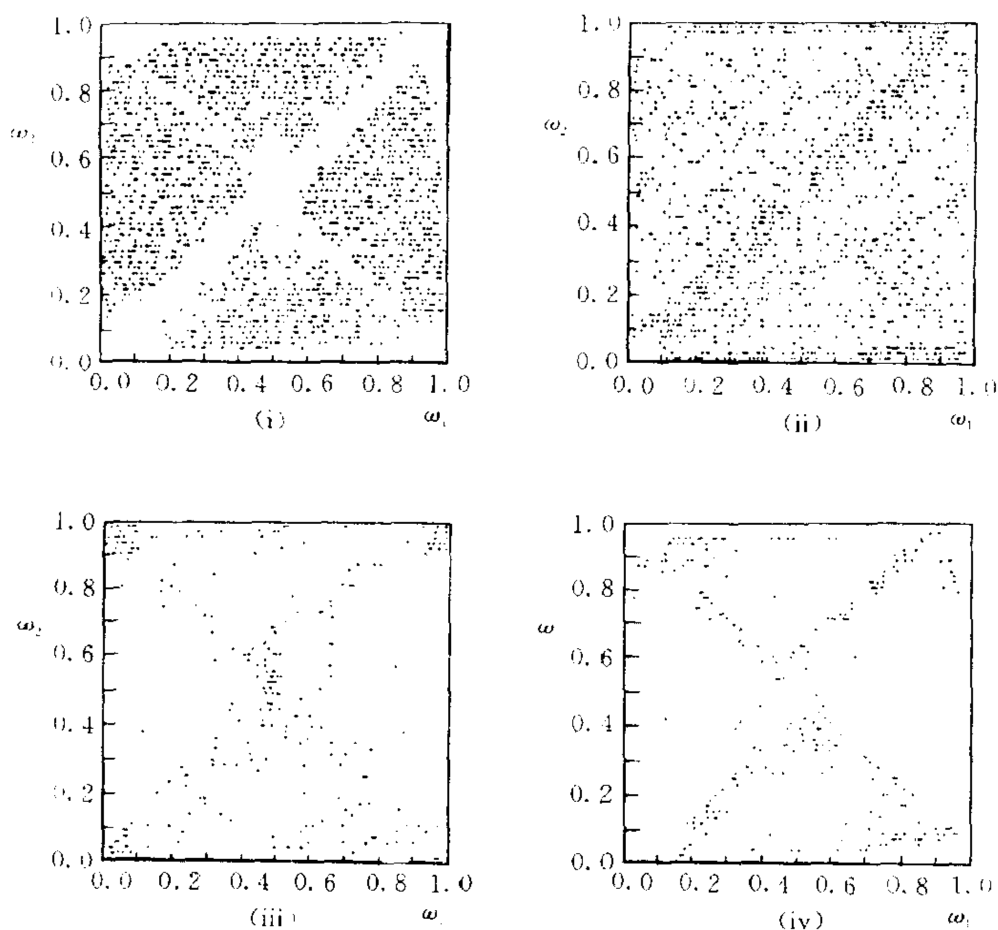


图 30-1

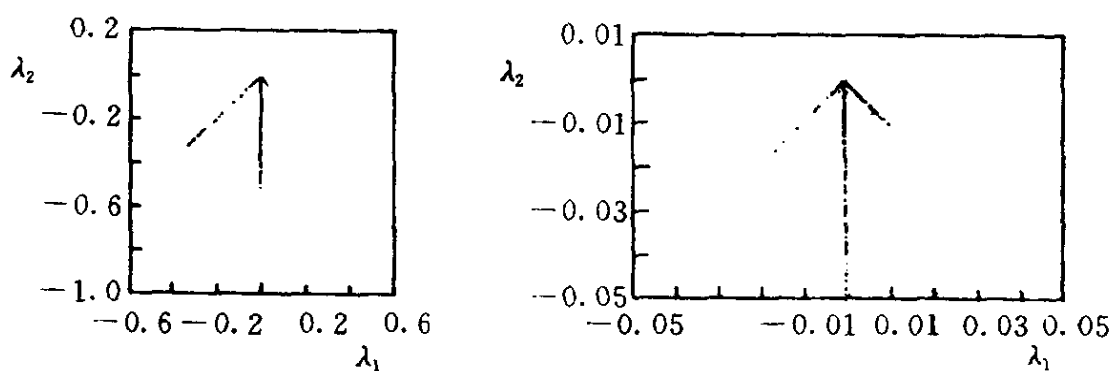


图 30-2

三频准周期轨道在 (x, y) 环面上是遍历的, 当 $\varepsilon/\varepsilon_c$ 小时, 其分布十分均匀. 图 30-3 给出了高度非线性情况 $\varepsilon/\varepsilon_c = 0.9$ 时

的一个分布，它已变得十分不均匀了．在 $\varepsilon/\varepsilon_c = 1$ 时分布变成奇异的．

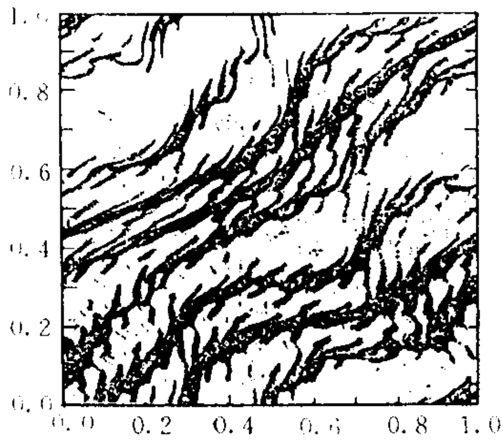


图 30-3

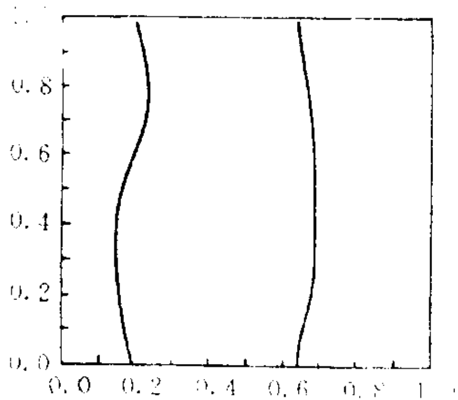
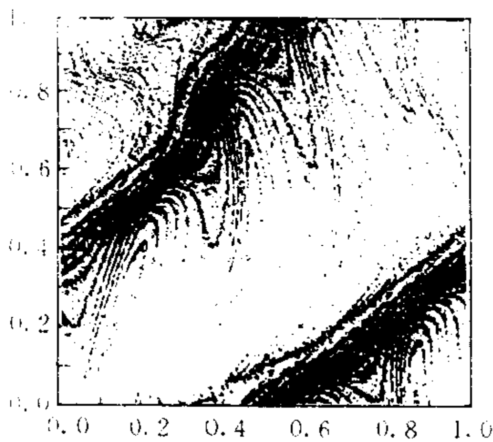
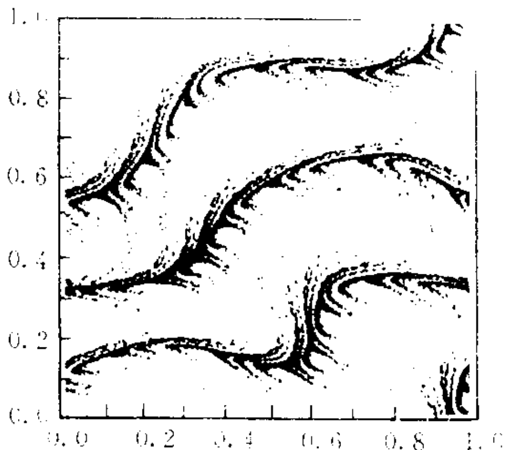


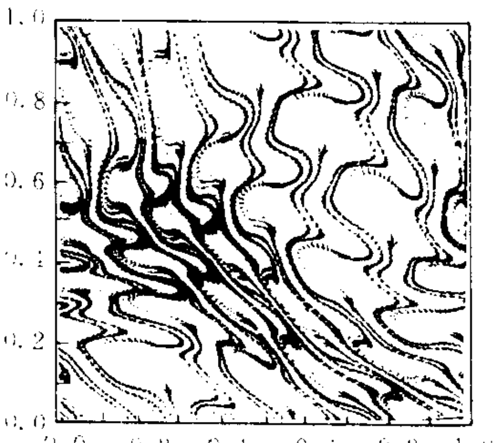
图 30-4



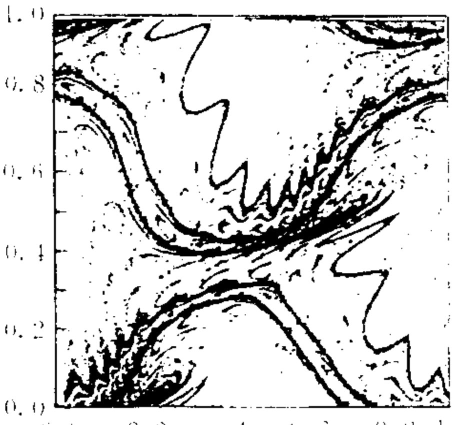
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

图 30-5

图 30-4 给出了一个二频准周期的例子，$\varepsilon/\varepsilon_c = 3/8$. 它在 x 方向只有两个值，所以 $\rho_1 = 1/2$, 而 ρ_2 为无理数.

混沌吸引子有多种多样的形式与结构，不能系统地详尽它们, 图 30-5(i)(ii)(iii)(iv) 给出了 $\varepsilon/\varepsilon_c = 3/4$ 时的一些例子. 其最值得注意的特征似乎是它们在环面上都是遍历的. 即只要等待足够长的时间, 轨道可以任意接近环面上给定的任一点. $\lambda_1+\lambda_2 < 0$ 表明轨道分布是高度奇异的，其奇异性可用李雅普诺夫维数 $d_L = 1 + \dfrac{\lambda_1}{|\lambda_2|}$ 表示. 这公式当 $\lambda_1 \geq 0$ 时适用，$\lambda_1 < 0$ 时 $d_L = 0$.

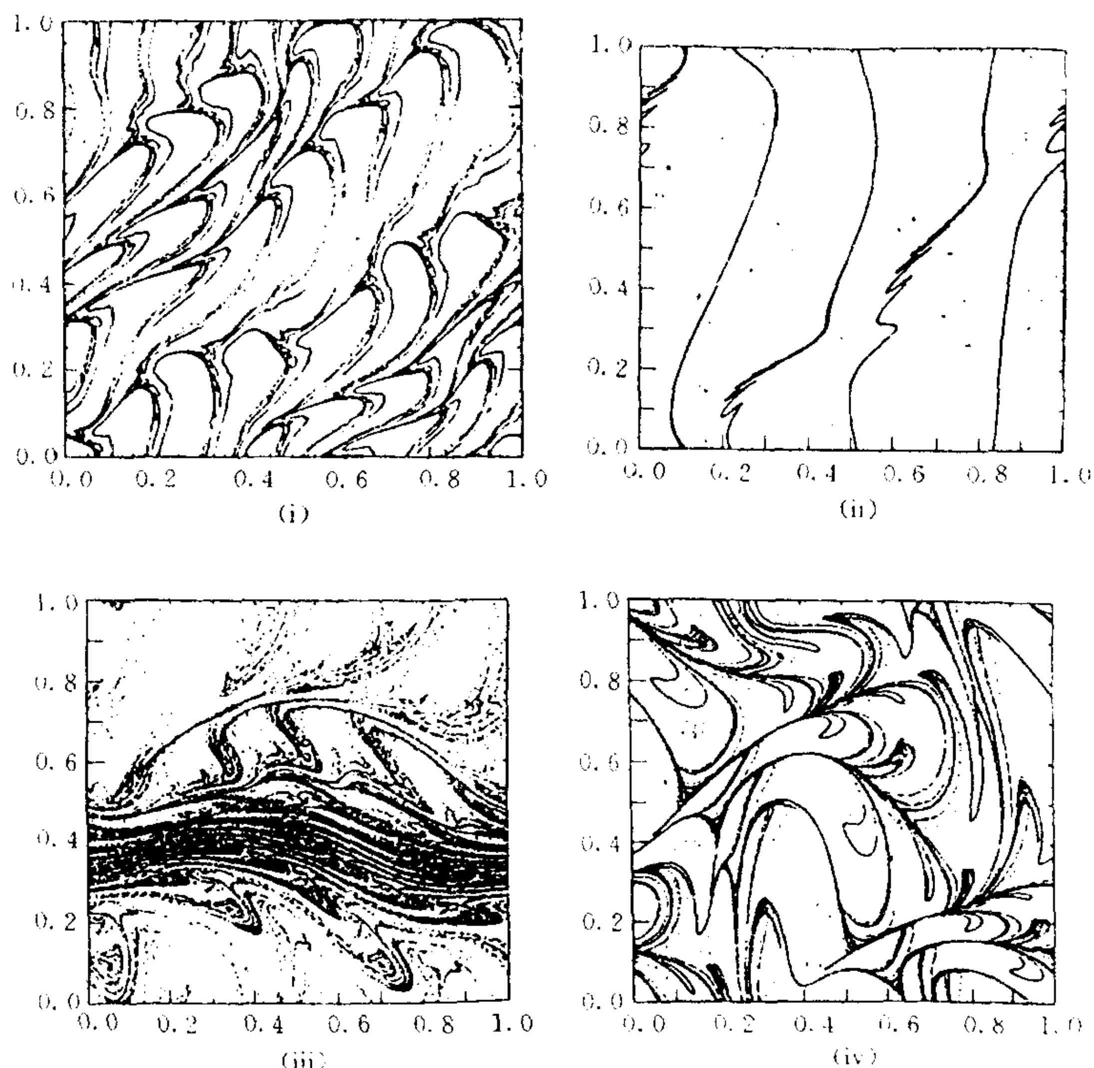


图 30-6

图 30-6(i)、(ii)、(iii)、(iv) 给出了更高 $\varepsilon/\varepsilon_c$ 值处的一些典型混沌吸引子，(i)、(ii) 是对 $\varepsilon/\varepsilon_c = 0.9$, (iii)、(iv) 是对 $\varepsilon/\varepsilon_c = 9/8$. 图 30-6(i)、(ii)、(iii) 都有明显的奇异性. 图 30-6(i) 显示出 28 个大体上重复的部分. 它们可了解为存在一对 28 周期的不稳定轨道，其中之一是鞍点型的，另一是排斥子. 图 30-6(i) 可看作是 28 周期鞍点型轨道的不稳定流形. 其详细结构是，由一个轨道点出发的不稳定流形与另一轨道点的稳定流形同宿相交，然后拉伸并来回折叠地趋向这另一轨道点的不稳定流形. 这种结构似乎是通过排斥子 - 鞍点分岔产生，正像前面讨论过的鞍结点对一样.

如用同样的算法来计算三维环面上的吸引子，A、B 系数将有 r、s、t 三个下标. 如把 r、s、t 的值只限于 ± 1 与 0, 则有独立的 78 个 A 与 B 系数，$\boldsymbol{g}$ 矢量包含 39 个正弦项. 现在，除了三频问题中的四种吸引子外，还出现四频准周期轨道. 对它们可用三个李雅普诺夫指数来判别. 表 30.3 给出了 $\varepsilon/\varepsilon_c = 0.35$ 与 0.7 的对 $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 随机选择的 256 组数作 4×10^5 迭代的统计的结果. 比较表 30.2 与表 30.3 可见：在可比的 $\varepsilon/\varepsilon_c$ 值处三维环面上的混沌吸引子出现的可能性比二维环面上的大；在 $\varepsilon/\varepsilon_c$ 小时，例如 ≤ 0.35, 准周期出现的可能性按 N 频，$(N-1)$ 频，$\cdots\cdots$, 1 频与周期轨道的次序排列，这与 $\varepsilon/\varepsilon_c \ll 1$ 时的理论概念一致.

表 30.3

吸引子类型	$\varepsilon/\varepsilon = 0.35$	$\varepsilon/\varepsilon_c = 0.7$
四频准周期	77%	6%
三频准周期	18%	29%
二频准周期	5%	23%
周期	0%	3%
混沌	2%	38%

§31 一个非线性电子振荡线路中的三频问题

在不同领域，特别是在流体力学实验中，观察到过多频准周期及其向混沌的转变，但其精度一般都不够高，不能给出一个全面的图象．本节将介绍一个非线性电子振荡线路中的三频问题，对它的测量有较高的精度，且有较系统的结果[45]．

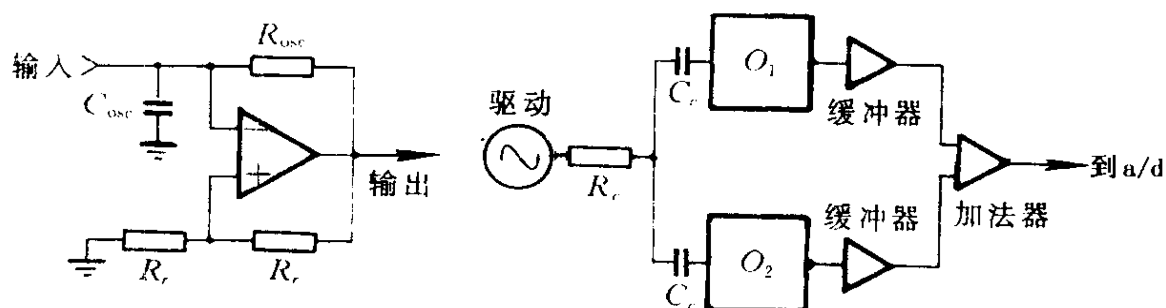


图 31-1

设计的电子线路中含有一对运算放大器的弛豫振荡器，它们互相对称地耦合，并与一外驱动耦合，如图 31-1 所示．能够可控制地调节所有有关的参数．弛豫振子的强耗散性，使得当外驱动的振幅较振子本身的振幅小时，运动是约束在三维环面上的．运算放大器在稳定的 ±5 伏输入下运行．它和耦合电容与振荡器电容之比 C_c/C_{osc} 确定了仪器的驱动振幅标度． R_c 的选择使振子间的耦合幅度小于驱动振幅标度的 1%．选 O_1 的自由频率为 250 kHz $(= 1/2.2R^1_{osc}C^1_{osc})$．三个可变参数是： O_2 的自由频

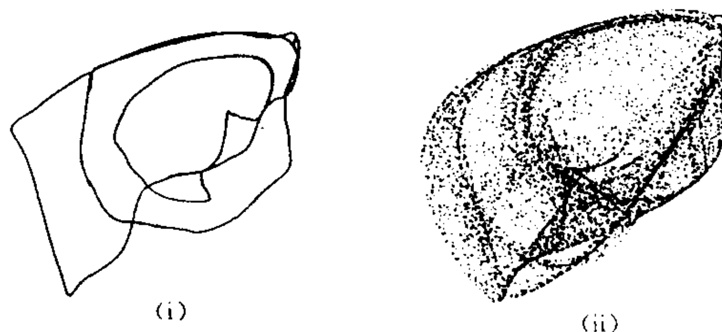


图 31-2

率，正弦驱动电压的频率与振幅．输出经模拟 - 数字转换器变为 32768 长度的离散时间序列．图 31-2 给出了用相邻 V_i 与 V_{i+1} 重构的二频和三频吸引子．

可用自关联函数来区别混沌与准周期．混沌运动自关联函数的包络呈阻尼振荡形状，其衰减比准周期的快得多．图 31-3 给出了驱动频率和振幅空间的高精度的扫描． O_2 频率的选择使驱动振幅为 0 时 O_1 与 O_2 是非锁模的．图中圆点代表周期，空白区代表准周期，方块代表混沌．一般地，含稠密周期点的空白区代表二频准周期，干净的空白区对应于二频准周期和三频准周期的交错带．只在图 31-3(iv) 中，所有空白区都表示二频准周期．相继四图中后一幅都是前一幅中方框部分的放大．

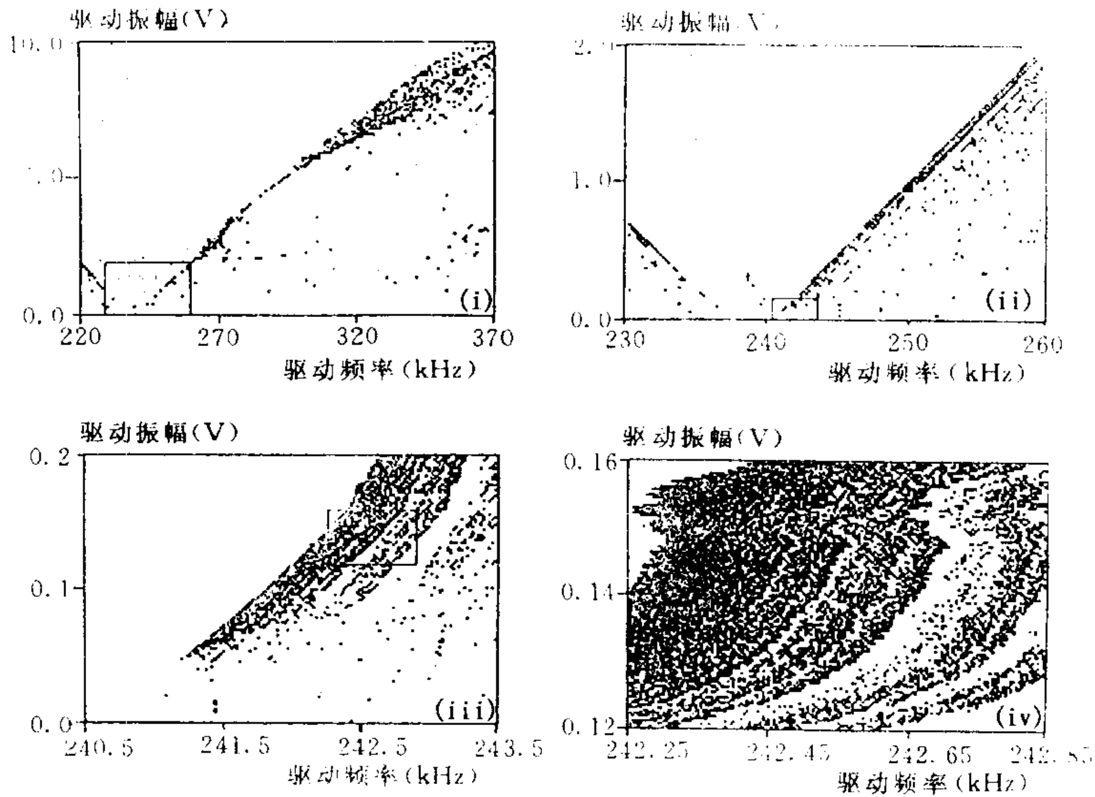


图 31-3

由图 31-3 可见，当驱动振幅很小时，参数空间的大部分都对应三频准周期，这与前节的理论结果一致．位于图 31-3(i) 的

左下角的方块并不来自噪声，而确是混沌，它们发生在低驱动振幅的情况．图 31-3(iv) 是其高分辨率的放大．如果参数落在这个区域，它可能符合茹厄勒 - 塔肯斯定理的条件．

§32　三频问题的重正化群分析

在 §30 我们曾经注意到：二维环面映射的雅可比行列式 $J = 0$ 定义了一个临界面．在临界面处，三频准周期的测度趋向 0．除此之外，临界面没有别的意义，例如，它并不像圆映射中那样是由准周期到混沌转变之处．而且在临界面上也没有找到过明显的标度律．但是，即使这样，研究一下三频准周期中的非临界标度律仍是有意义的．对三频准周期的有理逼近 (p_n, q_n, r_n)，可采用二次无理数递推关系的推广 [46]

$$
\begin{aligned}
p_n &= a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2} + p_{n-3}, \\
q_n &= a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2} + q_{n-3}, \\
r_n &= a_n r_{n-1} + b_n r_{n-2} + r_{n-3}.
\end{aligned} \tag{32.1}
$$

其最简单的情况是 $a_n = b_n = 1$ 给出的广义菲波那契数列

$$F_1 = F_2 = 0,\ F_3 = 1.\quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3}. \tag{32.2}$$

另一种简单情况是

$$
\begin{aligned}
&p_{-3} = 1, p_{-2} = 0, p_{-1} = 1, p_n = p_{n-2} + p_{n-3}; \\
&q_{-3} = 0, q_{-2} = 1, q_{-1} = 1, q_n = q_{n-2} + q_{n-3}; \\
&r_{-3} = 1, r_{-2} = 1,\ r_{-1} = 1,\ r_n = r_{n-2} + r_{n-3}.
\end{aligned} \tag{32.3}
$$

它所逼近的无理数被称为 **螺线中数**.

S.H. Kim 与 S. Ostlund 在推广法里树的基础上讨论了三频不可公度数的有理逼近 [47]. (p,q,r) 取最小的正整数的可能是 (0,1,1) 、 (1,0,1) 与 (1,1,1). 如图 32-1 所示把这三个数分别写在等腰直角三角形的三个顶点处. 则可如下地构造出 $p+q>r$, $0<p$ 、 $q<r$ 的所有有理数 $(p/r, q/r)$. 把原直角三角形等分为两个全同的等腰直角三角形, 在直角对边中点写上 (011)+(101)=(112). 对两个小的直角三角形施行同样的手续, 得到数组 (122) 与 (212). 重复上述手续至无穷, 就可得到所有的 $(p/r, q/r)$.

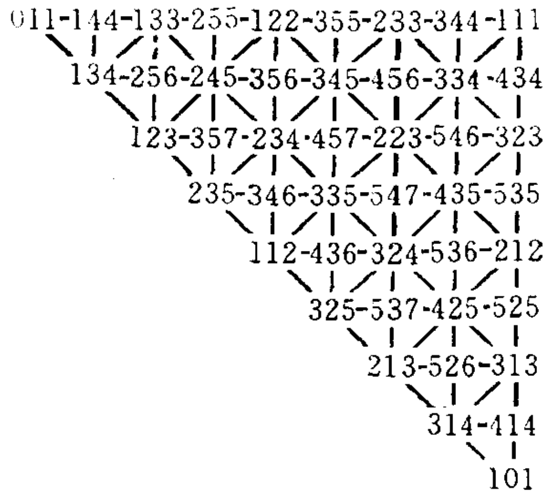


图 32-1

记上述三角形的顶点为

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= [(011)(101)(111)],\\ \Delta_1^0 &= [(111)(011)(112)],\\ \Delta_1^1 &= [(101)(111)(112)].\end{aligned} \tag{32.4}$$

Δ_1^0 与 Δ_1^1 至 Δ_0 的映射关系可表为

$$\sigma_0\Delta_1^0 = \Delta_0, \quad \sigma_1\Delta_1^1 = \Delta_0. \tag{32.5}$$

容易求得

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{32.6}$$

图 32-1 中任一组数都可用 σ_0 与 σ_1 组成的积表示出来. 其中特别是与 $\sigma_0^n|_{n\to\infty}$ 有关的数, 设 σ_0 的本征值为 $1/\tau$, 则 τ 满足

$$\tau^3 - \tau - 1 = 0. \tag{32.7}$$

它即 (32.3) 的特征方程. S.H. Kim 与 S. Ostlund 称 (τ^{-1}, τ^{-2}) 为螺线中数. 由图 32-1 和 σ_0^n 得到数列 (p_n, q_n, r_n), 即 (32.3) 定义的数列.

下面研究广义菲波那契序列 [48]. 其逼近的无理数满足下面的特征方程

$$\tau^3 - \tau^2 - \tau - 1 = 0. \tag{32.8}$$

它有根

$$\begin{aligned} &\tau_1 = 1.839286755\cdots, \\ &\tau_{2,3} = e^{\pm i\varphi}/\sqrt{\tau_1}, \quad \varphi = 2.176233524. \end{aligned} \tag{32.9}$$

(32.2) 有展开式

$$\begin{aligned} &F_n = a\tau_1^n + b\tau_n^{-n/2}\cos(n\varphi + \varphi_0), \\ &a = 0.182803534,\ b = 0.705198468, \\ &\varphi_0 = 4.450171533\cdots. \end{aligned} \tag{32.10}$$

在圆映射中,次临界区的标度律等价于平移运动的标度律. 在环面映射情况, 这一结论仍然成立, 它们可以用上述特征值表示. 考虑平移映射序列

$$\begin{aligned} &x' = x + \omega_{xn},\ y' = y + \omega_{yn},\ n = 3, 4, 5\cdots \\ &\omega_{xn} = F_{n+1}/F_n, \quad \omega_{yn} = F_{n-2}/F_n. \end{aligned} \tag{32.11}$$

其极限是转矢为 $(\omega_x, \omega_y) = (\tau_1^{-1}, \tau_1^{-2})$ 的三频准周期运动. 对于间隔 $\Delta\omega_{xn} = \omega_{x(n-1)} - \omega_{xn}$, $\Delta\omega_{yn} = \omega_{y(n-1)} - \omega_{yn}$, 可以定义两个 δ 标度律. 一个是

$$\delta \begin{pmatrix} \Delta\omega_{x(n+1)} \\ \Delta\omega_{y(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\omega_{xn} \\ \Delta\omega_{yn} \end{pmatrix}, \qquad (32.12)$$

另一个是

$$\delta_x \begin{pmatrix} \Delta\omega_{x(n+1)} \\ \Delta\omega_{xn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\omega_{xn} \\ \Delta\omega_{x(n-1)} \end{pmatrix},$$
$$\delta_y \begin{pmatrix} \Delta\omega_{y(n+1)} \\ \Delta\omega_{yn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\omega_{yn} \\ \Delta\omega_{y(n-1)} \end{pmatrix}. \qquad (32.13)$$

通过直接计算, 不难找到 δ, δ_x 与 δ_y 矩阵

$$\delta = \begin{pmatrix} -1 & \tau_1 \\ -(\tau_1 + \tau_1^{-1}) & -\tau_1 \end{pmatrix},$$
$$\delta_x = \delta_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\tau_1^3 & -(1+\tau_1) \end{pmatrix}. \qquad (32.14)$$

它们有同样的本征值

$$\delta_1 = \tau_1^2\tau_2, \quad \delta_2 = \tau_1^2\tau_3 = \delta_1^*. \qquad (32.15)$$

对于极限平移, 即准周期运动

$$x' = x + \tau_1^{-1}, \quad y' = y + \tau_1^{-2}, \qquad (32.16)$$

可以定义两个 α 标度律, 它们是

$$\alpha \begin{pmatrix} F_{n+1}\tau_1^{-1} - F_n \\ F_{n+1}\tau_1^{-2} - F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n\tau_1^{-1} - F_{n-1} \\ F_n\tau_1^{-2} - F_{n-2} \end{pmatrix} \qquad (32.17)$$

和

$$\alpha_x \begin{pmatrix} F_{n+1}\tau_1^{-1} - F_n \\ F_n\tau_1^{-1} - F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n\tau_1^{-1} - F_{n-1} \\ F_{n-1}\tau_1^{-1} - F_{n-2} \end{pmatrix},$$

$$\alpha_y \begin{pmatrix} F_{n+1}\tau_1^{-2} - F_{n-1} \\ F_n\tau_1^{-2} - F_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n\tau_1^{-2} - F_{n-2} \\ F_{n-1}\tau_1^{-2} - F_{n-3} \end{pmatrix}. \tag{32.18}$$

容易证明， α, α_x 与 α_y 有同样的本征值

$$\alpha_1 = \tau_2^{-1}, \quad \alpha_2 = \tau_3^{-1} = \alpha_1^*. \tag{32.19}$$

我们也可以用重正化群方法求得次临界标度律. 考虑如下的三频问题

$$x' = f_1(x,y) = x + \omega_x + g_1(x,y),$$
$$y' = f_2(x,y) = y + \omega_y + g_2(x,y). \tag{32.20}$$

g_1 与 g_2 是 x 与 y 的周期函数. 定义

$$f^n(x,y) = \begin{pmatrix} f_1^{(F_n)}(x,y) - F_{n-1} \\ f_2^{(F_n)}(x,y) - F_{n-2} \end{pmatrix}. \tag{32.21}$$

根据映射的性质与 (32.2) 式，可得

$$f^n = f^{n-1}f^{n-2}f^{n-3}. \tag{32.22}$$

α 标度律意味着 f^n 可表为

$$f^n = \alpha^{-n}g(\alpha^n x). \tag{32.23}$$

当 $n \to \infty$ 时， g 与 n 无关. 将 (32.23) 代入 (32.22), 可得 g 的方程

$$g(x) = \alpha g(\alpha g(\alpha g(\alpha^{-3}x))). \tag{32.24}$$

这是重正化群的不动点方程. 在不动点的邻域可定义重正化算符 R:

$$R\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u(\alpha v(\alpha w(\alpha^{-3}x))) \\ u \\ v \end{pmatrix}. \tag{32.25}$$

(32.24) 可写为 $g(x) = Rg(x)$. 在不动点 (32.24) 的邻域， R 的线性化算符为

$$DR\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ u \\ v \end{pmatrix}, \tag{32.26}$$

$$\begin{aligned} L =& \alpha u(\alpha g(\alpha g(\alpha^{-3}x))) + \alpha^2 g'(\alpha g(\alpha g(\alpha^{-3}x)))v(\alpha g(\alpha^{-3}x)) \\ &+ \alpha^3 g'(\alpha g(\alpha g(\alpha^{-3}x)))g'(\alpha g(\alpha^{-3}x))w(\alpha^{-3}x). \end{aligned} \tag{32.27}$$

在次临界区， $g(x) = \alpha + x$, $a = (a_x, a_y)$, 代入 (32.24) 得 $\alpha = (\lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1})$. 设线性化算符的本征函数 (u, v, w) 为常数，可得 $\delta = \lambda_1\alpha = (\lambda_1\lambda_2^{-1}, \lambda_1\lambda_3^{-1})$. 这些结果与直接计算结果一致. 对其他三次无理数，可作类似的讨论.

对于不同的二维环面映射，在次临界情况，数值实验证实了上述标度律. 但是没有找到临界标度现象. S.H. Kim 与 S. Ostlund 研究了如下映射 [47]

$$\begin{aligned} f_1 &= x + \omega_x + \frac{k}{4\pi}\sin(2\pi y), \\ f_2 &= y + \omega_y + \frac{k}{\pi}\sin(2\pi x). \end{aligned} \tag{32.28}$$

它在 $k = 1$ 时变为不可逆的. 但是，正如在保守映射中那样，二维映射在可逆情况也可能出现临界现象. 数值实验表明，对于数列 (32.2) 与转矢 $(F_{n-1}/F_n, (F_{n-1} + F_{n-2})/F_n)$, 临界点 k_c 在 $k = 1$ 之下， $0.96 < k_c < 0.97$. 在 $k = 0.97$ 时，选 (ω_x, ω_y) 使 $x = y = 0$ 为稳定周期点之一, 对 (x, y) 的单位相空间中 100×100 格点作 149 次迭代，得到图 32-2. 图中黑点为 149 周期轨道，同时标出了原点的映象与前象. 图形显示，对于 149 次映射，其雅可比行列式出现奇异性. 据此， $k = 0.97$ 可取为 k_c 的上限. 在上述区域内没有找到 δ 或 α 标度律. 为了克服寻找临界点的

困难，[48] 对不耦合的两个圆映射作了研究. 数值实验表明, 这时也不存在临界标度律，原因是逼近三次无理数的有理序列的分子与分母不总是不可约的. 对于是否存在临界标度律与为什么找不到临界标度律，还有其他不同的说法，它们都不能算作是定论，这里就不赘述了.

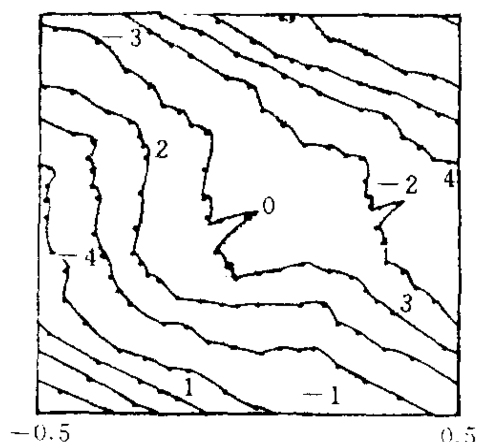


图 32-2

§33 准周期强迫圆映射

多频问题由于其复杂性，至今，我们对它还只有概貌性的认识. 环面映射中的一个最简单的非平庸情况，是当 (32.20) 中 f_2 为平移且对 f_1 起强迫作用的特例，即准周期强迫圆映射

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + \omega_x + \frac{k}{2\pi}\sin(2\pi x_n) + \varepsilon\sin(2\pi y_n),\\
y_{n+1} &= y_n + \omega_y.
\end{aligned}
\tag{33.1}
$$

它因会产生非混沌的奇怪吸引子而引起众多的注意. 因而对它的研究也比较深入. 在这里，我们把它作为三频问题的一个特例来讨论，且仅限于 $\omega_y = \omega = (\sqrt{5}-1)/2$ 的情况.

(33.1) 式 y 分量的李雅普诺夫指数总是 0, 转数总是 ω_y. 因此，只有 x 分量的李雅普诺夫指数 λ 与转数 ρ 是有意义的. 关于转数的三频共振 $l\omega_1 + m\omega_2 + n\omega_3 = 0$ 条件，可以写为锁频关系式

$$
\rho = \frac{p}{r} + \frac{q}{r}\omega. \tag{33.2}
$$

根据 λ 与 ρ, 可以将吸引子进行分类，如表 33.1 所示

表 33.1

李雅普诺夫指数	转　数	吸引子类型
$\lambda=0$	$\rho\neq\frac{p}{r}+\frac{q}{r}\omega$	三频准周期
$\lambda<0$	$\rho=\frac{p}{r}+\frac{q}{r}\omega$	二频准周期
$\lambda<0$	$\rho\neq\frac{p}{r}+\frac{q}{r}\omega$	非混沌奇怪吸引子
$\lambda>0$	$\rho\neq\frac{p}{r}+\frac{q}{r}\omega$	混沌吸引子

图 33-1 给出了各种类型吸引子的相空间分布及频谱 [49]. 在计算中，迭代次数在 4×10^4 到 2×10^5 之间，决定于李雅普诺夫指数的收敛情况. 傅里叶谱用快速傅里叶分析求得，长度为 2^{15}. 满足 $-0.5\times10^4<\lambda<0.5\times10^4$ 的 λ 认为是 $\lambda=0$, 否则为大于或小于 0. 图 33-1(i) 给出了一个典型的三频准周期轨道，它充满整个相空间，密度分布是光滑的，图 33-1(ii) 是其频谱. 图 33-1(iii) 、(iv) 给出 $(p,q,r)=(1,-1,1)$ 二频准周期，频谱是线谱. 图 33-1(v)(vi) 给出非混沌奇怪吸引子，这时，我们仍可认为 x 是 y 的函数 $x=F(y)$, 但 F 是多值的且处处不连续. 可以如下检验这一关系：

①在一给定 y 值处选大量不同 x 值的点，作大数值 N 的迭代，最后，所有点都吸引到 $x_N^{(i)}$ 上 $(i=1,2,\cdots,P)$, P 就是 F 的多重性.

②因为转数 ρ 与 1 与 ω 的关系是无理的， $x=F(y)$ 不连续.

③因为 y 是遍历的，所以 $F(y)$ 处处不连续.

图 33-1(vii)(viii) 给出了混沌吸引子的相空间分布及其频谱.

关于参数空间的相结构，可以预期，当 ε 小时保留了 $\varepsilon=0$ 时相结构的概貌. 图 33-2(i) 给出了 $\varepsilon=0.6/2\pi$ 时由 (33.1) 得到的 (ω,k) 平面上的相结构. 作为对比，图 33-2(ii) 给出了 $\varepsilon=0$

时 (ω, k) 平面上的相图. 图 33-2(i) 可分为三个区域. 在区域 1 中, 影线区的李雅普诺夫指数小于 0, 为二频准周期区, 空白区的李雅普诺夫指数等于 0, 为三频准周期区. 这个区域的结构

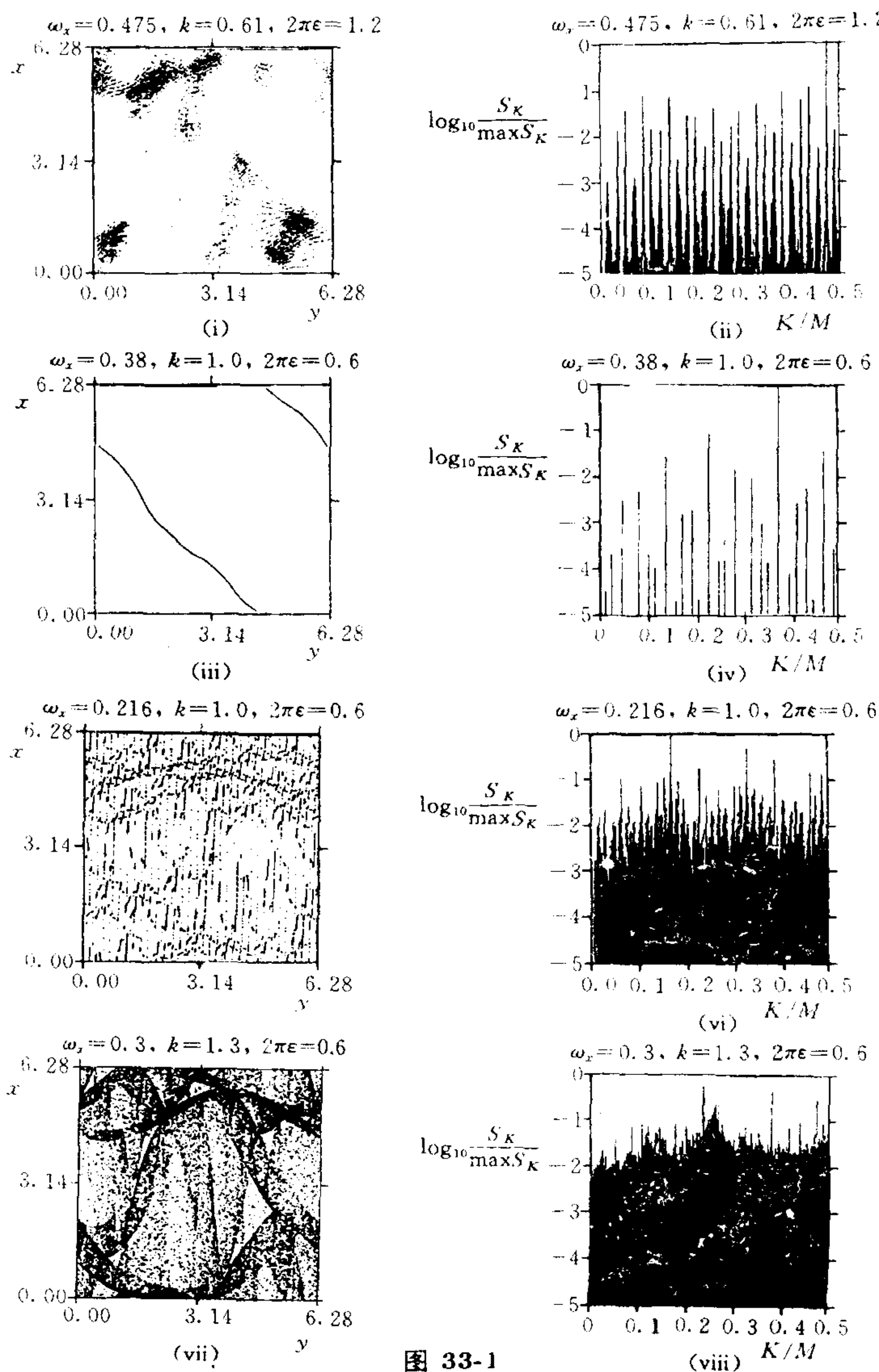


图 33-1

与圆映射相似. 区域 2 在两条临界线之间, 李雅普诺夫指数小于 0, 为二频准周期区或非混沌奇怪吸引子. 在区域 3, 影线区为二频准周期, 空白区为混沌吸引子, 后者的李雅普诺夫指数大于 0. 图 33-2 表明由三频准周期到非混沌奇怪吸引子到混沌的过渡经过两条临界线. 这两条临界线在 $k=1$ 的上下. 在 $k=1$ 处, 映射 (33.1) 变为不可逆的. 在临界线之下, 图 33-2(i) 的结构比图 33-2(ii) 复杂, 这是因为 $\varepsilon=0$ 时有 $\rho=\frac{p}{r}+\frac{q}{r}\omega$ 锁相结构. 后者当 p 、 r 给定时, q 仍可取不同的值.

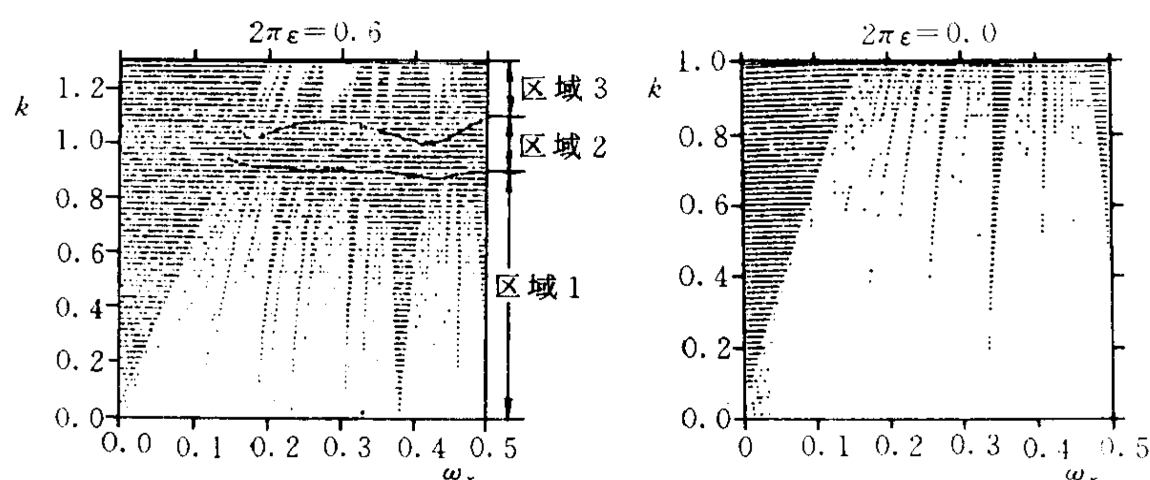


图 33-2

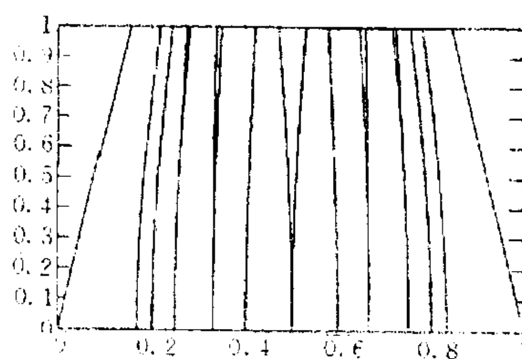


图 33-3

可以采用与 §4 相同的方法来确定二频准周期 (33.2) 的阿诺尔德舌头的边界. 由于该方法只适用于周期轨道, 对准周期要采用与对应连分式相应的周期轨道来逼近的方法. 如 ω 的有理近似为 m_j/n_j, 则取互质的 P_j 与 Q_j, $\frac{P_j}{Q_j}=\frac{qm_j+pn_j}{rn_j}$, 用 §4 方法求其阿诺尔德舌头的边界. 当 n_j 有限时, 所得边界与 y 的初值有关, 但当 $n_j\to\infty$ 时与 y

的初值无关. 图 33-3 就是用这样办法定出的 $\varepsilon = 0.6/2\pi$ 情况的头几个阿诺尔德舌头 [50].

在阿诺尔德舌头边界处发生鞍节分岔 [51], 产生或者消失一对不变曲线, 其中一条是稳定的, 另一条是不稳定的. 图 33-4(i)(ii) 给出了 $\varepsilon = 1.0$, $k = 0.2$ 时经过 $\rho = 0$ 舌头边界发生的情况. 在边界处两条不变曲线处处重合. 边界外发生三频准周期现象, 轨道布满整个相空间, 但在原来不变曲线的邻域具有高密度. 对于较大的 ε 值, 跨越锁相边界时会产生非混沌奇怪吸引子. 如图 33-5(i)(ii) 所示, 在转变前也有稳定的与不稳定的不变曲线. 但是它们是起皱的, 因此只在可数的稠密点集互相接触, 其他部分是远离的, 在边界外转变为非混沌奇怪吸引子.

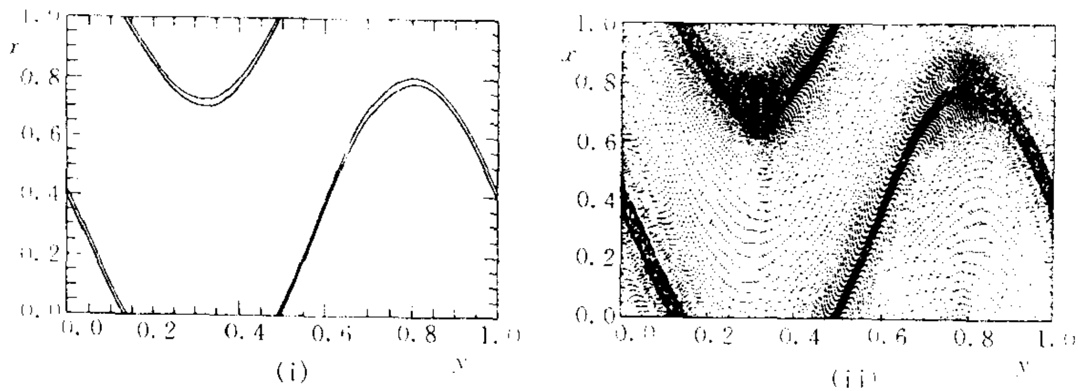


图 33-4

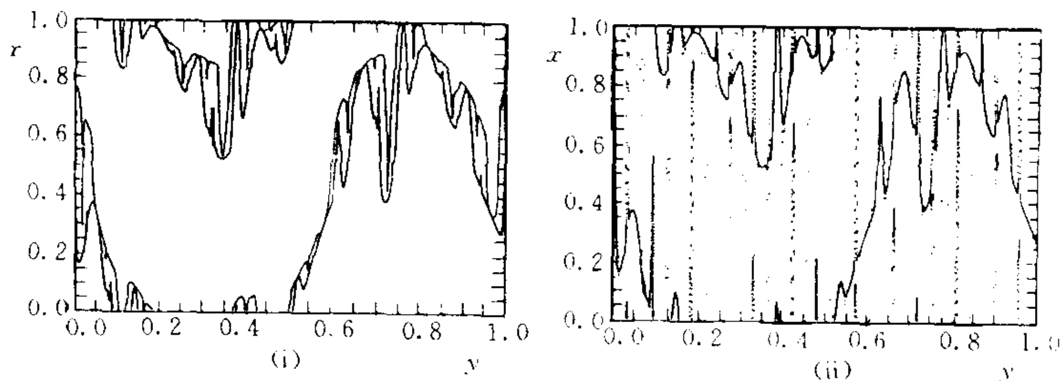


图 33-5

下面考虑阿诺尔德舌头的边界随准周期强迫强度 ε 的变

化. 图 33-6(i) 与 (ii) 分别给出了 $\rho = 1/2$ 与 $\rho = 1/2(1-\omega)$ 舌头边界随 ε 的变化情况. $\rho = 1/2$ 的舌头在非强迫系统 $\varepsilon = 0$ 中本已存在, 它随 ε 的增大而迅速缩小, 且形状也发生变化. 对于小的 ε, 它的宽度随 k 单调增加. 对大的 ε, 它随 k 始时增加, 以后则减小, 变成叶子形的. 所有 $\rho = p/r$ 转数的舌头都具有这种特征, 且较高的周期对较小的 ε 就发生这种变化, 以致在计算精度内很难发现它们的存在. 对 $\rho = 1/2(1-\omega)$ 舌头, 情况是类似的, 但 $\varepsilon = 0$ 时它收缩为 0. 随 ε 的增加, 出现宽度随 k 单调增加的舌头. 而随 ε 的继续增加, 它也变成叶子形的. 此外, 它弯曲的方向也随 ε 变化, $\varepsilon = 0.1$ 与 0.2 时, 随 k 的增大它弯向 ω_x 大的方向. 而 $\varepsilon = 0.5$ 与 1.0 时, 随 k 的增大, 它弯向 ω_x 小的方向. 因此, 不同转数的舌头其行为细节是不同的. 但对所有 $\rho = \dfrac{p}{r} + \dfrac{q}{r}\omega$ 舌头都有如下共同的特征: ① $\varepsilon = 0$ 时其宽度为 0; ②对小的 ε, 锁相区有舌头形状, 宽度随 k 单调增加; ③对较大的 ε, 锁相区有叶子的形状, 因此对大的 k 其宽度很小.

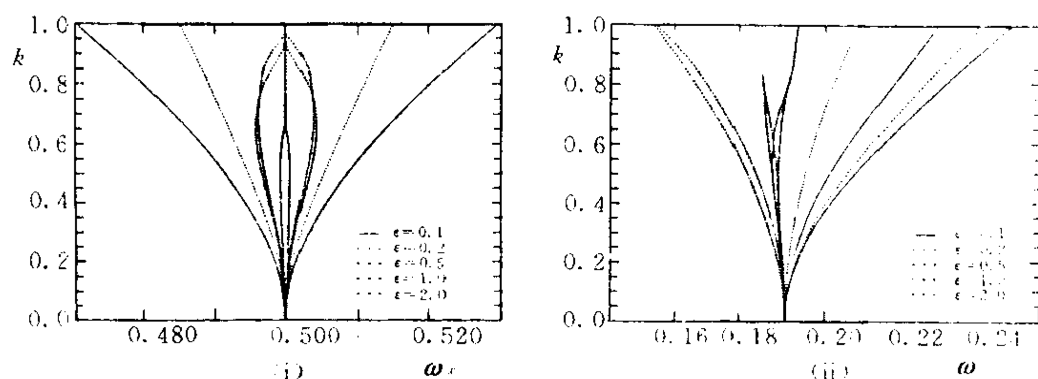


图 33-6

为了研究舌头形状与非混沌奇怪吸引子出现的关系, 可以计算李雅普诺夫指数沿舌头边界的变化. 结果发现, 当舌头在增宽时, 李雅普诺夫指数为 0, 当舌头变窄时, 李雅普诺夫指数为负. 因此舌头变窄时, 越过边界会出现非混沌奇怪吸引子. 至

于这个对应关系是准确的或只是近似的，仍是未解决的问题.

图 33-7(i) 与 (ii) 给出了 $\varepsilon=1$ 时 (ω_x, k) 平面上的相结构与 $\varepsilon=1, k=1$ 时的魔梯. 图 33-7(i) 中实线为 $\rho=p/r$ 舌头，由左至右 ρ 分别为 0/1, 1/5, 1/4, 2/7, 1/3, 2/5, 1/2; 虚线为 $\rho=\dfrac{p}{r}+\dfrac{q}{r}\omega$ 舌头. 二频准周期的舌头较宽，图 33-7(ii) 所示的魔梯上它们占了绝大部分. 由于 $r>1$ 的舌头随 k 增加迅速收缩，在 $k=1$ 线上几乎只剩下 $r=1$ 的舌头. 图 33-7(i) 中锁相区之间的连线是临界线的简化表示，在这条线之下有三频准周期，在它之上则出现非混沌奇怪吸引子. 这条临界线随 ε 的增加移向较小的 k 值处. U. Fendel, C. Grebogi 与 E. Ott 推测，在这条线上锁相区是稠密的，非锁相区的测度为 0.

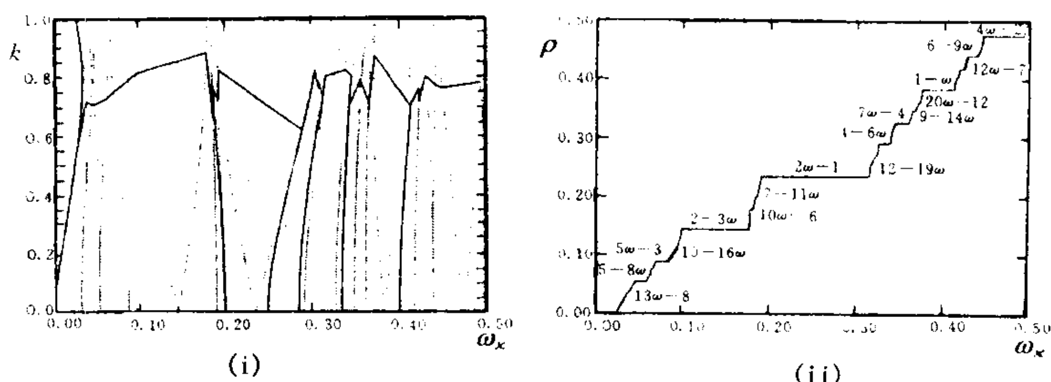


图 33-7

§34 非混沌奇怪吸引子的鉴别与实验观测

上面的研究引起了对实际系统中非混沌奇怪吸引子的研究的兴趣. 例如，曾对准周期强迫阻尼单摆作过数值与模拟研究 [52], 对 Ge 中二频激发的电子 - 空穴等离子体不稳定性作过实验研究 [53], 用二频准周期驱动的磁性弹条观察到了非混沌奇

怪吸引子[54]. 本节将只介绍最后一个实验，它给出了对非混沌奇怪吸引子的确定的鉴别.

实验中用傅里叶谱与信息维这两个特征量来区别二频准周期、三频准周期与非混沌奇怪吸引子，因此，在介绍实验结果之前先介绍一下这两个特征量与三种运动形式的关系[55].

对于三频准周期运动

$$\phi(t)=\hat{\phi}(\omega_1 t,\omega_2 t,\omega_3 t), \tag{34.1}$$

其中 $\hat{\phi}$ 是三个宗量的 2π 周期函数，如以 $t_n=\dfrac{2\pi}{\omega_2}n+t_0$ 采样得 ϕ_n, 则 ϕ_n 可展为傅里叶级数

$$\phi_n=\sum_{p,q}C_{p,q}\exp\left[i(p\omega_1+q\omega_3)\frac{2\pi}{\omega_2}n\right], \tag{34.2}$$

其 M 长度的离散傅里叶变换为

$$\phi_k=\sum_{p,q}C_{p,q}\sum_{n=0}^{M-1}\exp\left[i2\pi n\left(\frac{p\omega_1+q\omega_3}{\omega_2}-\frac{k}{M}\right)\right], \tag{34.3}$$

它在 $\dfrac{k}{M}=\left[\dfrac{p\omega_1+q\omega_3}{\omega_2}\right]\pmod 1$ 处有峰值，这里 ω_1 、 ω_2 与 ω_3 互为无理的. 当在二频情况 $\omega_3=l\omega_1+m\omega_2$, (34.3) 简化为

$$\phi_k=\sum_{p}C_p\sum_{n=0}^{M-1}\exp\left[i2\pi n\left(p\frac{\omega_1}{\omega_2}-\frac{k}{M}\right)\right], \tag{34.4}$$

它在 $\dfrac{k}{M}=\left(p\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)\pmod 1$ 处有峰值. §33 曾提到，二频准周期与非混沌奇怪吸引子的相空间轨道都存在确定的关系 $x=F(y)$, y 对应于 t_n, 因此非混沌奇怪吸引子的傅里叶变换也有与 (34.3) 相同的形式. 它们之间的不同处是：对应二频准周期， F 是光

滑的，当 $|p| \to \infty$ 时， $C_p \sim \exp(-\nu|p|)$; 对于奇怪吸引子， F 是奇异的，如 $x \to x_0$ 有 $F \sim |x - x_0|^{-\beta}, 0 < \beta < 1$, 则 $|p| \to \infty$ 时，$C_p \sim |p|^{\beta}$. 为了得到谱的更定量的特征，定义谱分布 $N(\sigma)$ 为强度大于 σ 的傅里叶分量的数目. 当 k 大时， ϕ_k 随 k 增加而减小， $\sigma = \phi_k$ 定义的 k 值正比于 $N(\sigma)$. 因此，对于二频准周期，

$$N(\sigma) \sim \log \frac{1}{\sigma}; \tag{34.5}$$

对于非混沌奇怪吸引子，

$$N(\sigma) \sim \sigma^{-\alpha}, \quad \alpha^{-1} = 1 - \beta; \tag{34.6}$$

对于三频准周期，因为 $\hat{\phi}$ 是光滑的， $C_{pq} \sim \exp[-v(p^2 + q^2)^{1/2}]$, $N(\sigma) \sim k^2$, 所以有

$$N(\sigma) \sim \left(\log \frac{1}{\sigma}\right)^2. \tag{34.7}$$

信息维的定义是

$$d_i = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big[I(\varepsilon)/\ln(1/\varepsilon)\Big], \text{ 其中 } I(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i. \tag{34.8}$$

p_i 由计算覆盖吸引子的方盒子中轨道点数而得. 对于二频准周期， $d_i = 2$; 对于三频准周期， $d_i = 3$. 混沌吸引子至少有一个不稳定方向， d_i 不应小于 3. 因此，如果 d_i 为小于 3 的分数，必对应非混沌奇怪吸引子. 如果采用卡普兰 - 约克推测，非混沌奇怪吸引子的 $d_i = 2$, 这也不排除分形结构，因为容量维总是大于信息维. 对于时间序列重构相空间来说，前面的维数都应减一.

磁性弹条实验装置中含有一因重力而弯曲的非晶磁性弹条，这种非晶材料的杨氏模量在小的外磁场中显现很大的可逆变化.

它被夹在一底座上，其高度大于欧拉弯曲长度，因而初始呈弯曲状态．然后用一 $H = H_1 \cos\omega_1 t + H_2 \cos\omega_2 t$ 的垂直磁场去驱动它．在补偿地磁场后的磁场强度为 0.50 ~ 0.90 奥斯特．在弹条底部用一感应器测量它的曲率．感应器输出的 $V(e)$ 以 $2\pi/\omega_1$ 采样．实验中取 $H_1 = 0.71$ Oe, $\omega_1/2\pi = 0.5$ Hz, $\omega_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\omega_1$, H_2 作为控制参量．

图 34-1 给出了 $H_2 = 0.53$Oe 时的 $V_n \equiv V(t_n)$ 对 $\theta_n \equiv (n\omega_2/\omega_1) \pmod 1$ 的图．吸引子是一光滑曲线，表明它是二维环面上的准周期运动．图 34-2 给出了 $H_2 = 0.80$Oe 时在两个不同尺度上的 (θ_n, V_n) 图，下面将论证它是一个非混沌奇怪吸引子．图 34-3 给出了上述两个时间序列傅里叶谱．图 34-3(i) 显示的是二频准周期谱，它集中在离散的频率集上．图 34-3(ii) 则显示了更丰富的谐波结构与更高的基线．图 34-4 给出了这两个谱的谱分布函数．图 34-3(i) 的谱函数显示 $N(\sigma) \sim \ln\frac{1}{\sigma}$, 图 34-3(ii) 的谱函数显示 $N(\sigma) \sim \sigma^{-\alpha}$, 最好的拟合得 $\alpha = 1.25 \pm 0.05$. 这些结果与理论预期的一致．用最大为 1000×1000 的格子数去计算信息维，对 $\ln\frac{1}{\varepsilon} < 5.5$ 部分用最小

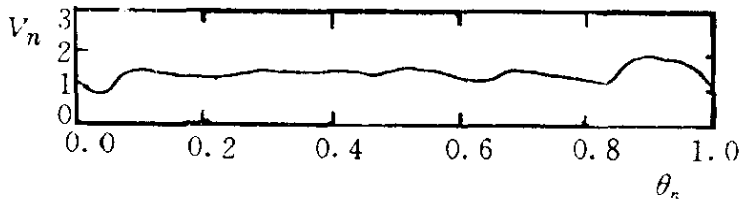


图 34-1

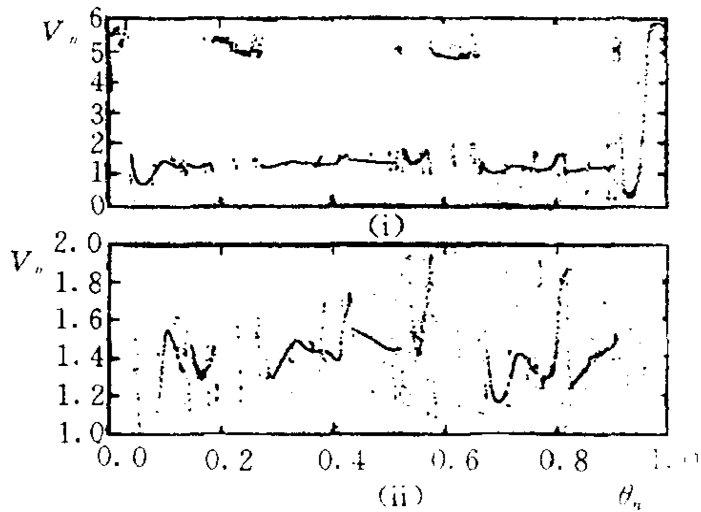


图 34-2

二乘法拟合得截面上信息维 $d_i \approx 1.3$.

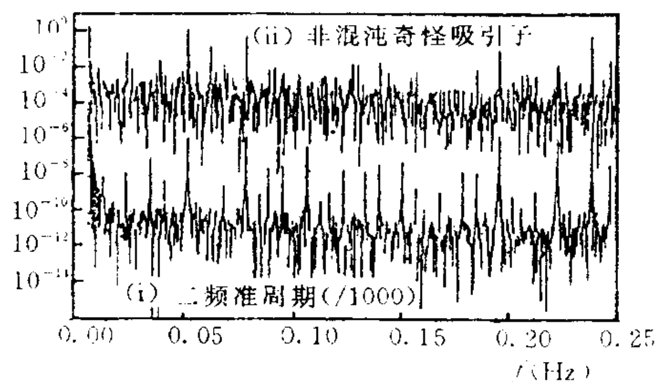


图 34-3

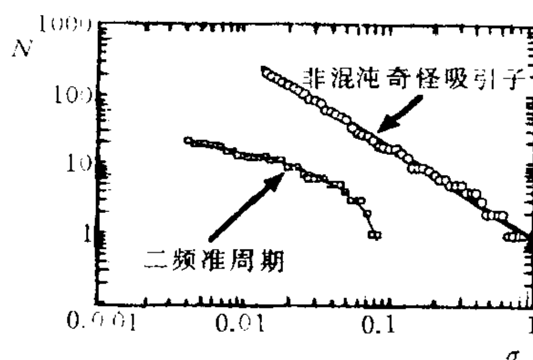


图 34-4

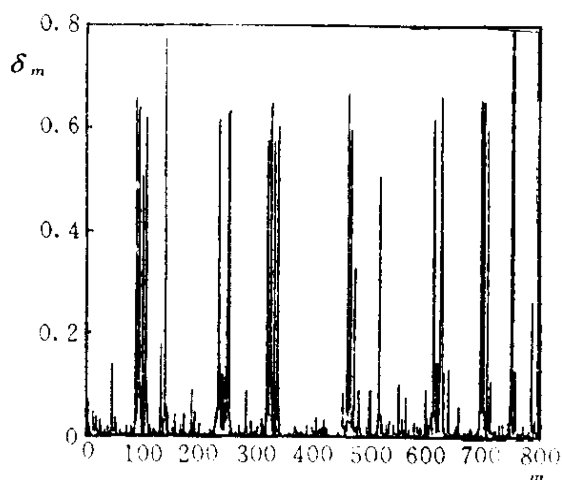


图 34-5

为了能对非混沌奇怪吸引子有一更具体的感觉，研究了由相邻两点 (θ_j, V_j)、$(\theta_{j'}, V_{j'})$ 出发的两条轨道的垂直距离 $\delta_m \equiv |V_{j'+m} - V_{j+m}|$ 随 m 的变化 (注意 $|\theta_{j'+m} - \theta_{j+m}|$ 不随 m 变化). 图 34-5 给出了图 34-2 所示时间序列相对应的 δ_m-m 图. 它所显示的特征行为是：在长时间内 δ_m 具有小的值，在很短

的时间内增至大的值，又很快地回到小的值．这与混沌运动中相邻点的指数分离行为根本不同．这种行为与前节提及的 $V = F(\theta)$ 函数的处处不连续性有关．

最后要提到，在 $0.75\ \mathrm{Oe} < H_2 < 0.90\mathrm{Oe}$ 区间内都观察到了与图 34-2 相似的非混沌奇怪吸引子，表明它在参数空间中具有非零的测度．

参考文献

[1] 陈式刚，《映象与混沌》，国防工业出版社，1992.

[2] D. Ruelle and F. Takens, *On the nature of turbulence*, Commun. Math. Phys., 20 (1971) 167–192.

[3] S. Newhouse, D. Ruelle and F. Takens, *Occurrence of strange axiom A attractors near quasiperiodic flows on T^m, $m \geq 3$*, Commun. Math. Phys., 64 (1978) 35–40.

[4] H. Poincare, Sur les courbes definies par des equations differetielles, J. Math. Pures et Appl. 4eme serie, 1885, 1, 167∼244, in: Oeuvres Completes, t.1 (Gauthier-Villars, Paris, 1951).

[5] A. Denjoy, Sur les courbes definies par des equations differetielles a la surface du tore. J.Math. Pures et Appl., 11 (1932) 333∼375.

[6] I.P. Cornfeid, S.V. Fomin and Y.G. Sinai, Ergodic theory, (Berlin: Springer-Verlag, 1982).

[7] Hao Bai-lin, Elementary Symbolic Dynamics (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1989) 208-228.

[8] S. Kim and S. Ostlund, Universal scaling in circle maps, Physica D39 (1989) 365-392.

[9] M.H. Jensen, P. Bak and T. Bohr, Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. I. Cirde maps, Phys. Rev., A30 (1984) 1960-1969.

[10] P.L. Boyland, Bifurcations of circle maps: Arnol'd tongues, bistability and rotation intervals, Commun. Math. Phys., 106 (1986) 353-381.

[11] R.S. Mackay and C. Tresser, Transition to topological chaos for circle maps, Physica 19D (1986) 206-237.

[12] 郑伟谋，郝柏林，《实用符号动力学》，上海科技教育出版社，1994.

[13] 张忠建，陈式刚，圆映象的符号动力学，物理学报，38 (1989) 1-8.

[14] S. Fraser and R. Kapral, Universal vector scaling in one dimensional maps, Phys.Rev., A30 (1984) 1017-1025.

[15] J.D. Farmer and I.I. Satija, Renormalization of the quasiperiodic transition to chaos for arbitrary winding number, Phys.Rev., A31(1985) 3520-3522.

[16] S.J. Shenker, Scaling behaviour in a map of a circle onto itself: empirical results, Physica, 5D (1982) 405-411.

[17] P. Alstrom, B. Christiansen, P. Hyldgaard, M.T. Levinsen and R. Rasmussen, Scaling raletions at the critical line and the period-doubling route for the sine map and the driven damped pendulum, Phys.Rev., A34 (1986) 2220-2233.

[18] H.G.E. Hentshel and I. Procaccia, The infinite number of generalizaed dimensions of fratals and strange attracttors, Physica, 8D (1983) 435-444.

[19] T.C. Halsey, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia and B.I. Shraiman, Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets, Phys.Rev., A33 (1986) 1141-1152.

[20] B.G. Levi, New global fractal formalism describes paths to turbulence, Phys.Today, 39 (1986, April) 17-18.

[21] M.J. Feigenbaum, L.P. Kadanoff and S.J. Shenker, Quasiperiodicity in dissipative systems: a renormalization group analysis, Physica, 5D (1982) 370-386.

[22] P. Astrom, Map dependence of the fractal dimension deduced from iterations of circle maps, Commun.Math.Phys., 104 (1986) 581-589.

[23] P. Cvitanovic, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff and I. Procaccia, Renormalization, unstable manifolds, and the fractal structure of mode locking, Phys. Rev. Lett., 55 (1985) 343-346.

[24] 王光瑞，陈式刚，超临界圆映象的混沌测度及其标度律，物理学报，39 (1990) 1705-1713.

[25] R.V. Jensen and E.R. Jessup, Statistical properties of the circle map, J.Stat.Phys., 43 (1986) 369-390.

[26] T. Geisel and J. Nierwetberg, Onset of diffusion and universal scaling in chaotic systems, Phys. Rev. Lett., 48 (1982) 7-10.

[27] T. Bohr and G. Gunaratne, Scaling for supercritical circle-maps: numerical investigation of the onset of bistability and period doubling, Phys. Lett., 113A (1985) 55-60.

[28] K. Kaneko, Supercritical behaviour of disordered orbits of a circle map, Prog. Theor. Phys., 72 (1984) 1089-1103.

[29] C. Chen, G. Gyorgyi and G. Schmit, Scaling in the circle map above criticality, Phys. Lett., 122A (1987) 89-94.

[30] E.J. Ding, Scaling behaviour in supercritical sine circle map, Phys. Rev. Lett., 58 (1985) 1059-1061.

[31] T. Bohr, P. Bak and M.H. Jensen, Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. 2. Josephson junctions, charge-density-waves and standard maps, Phys. Rev., 30A (1984) 1970-1981.

[32] S.E. Brown, G. Mozurkewich and G. Gruner, Subharmonic Shapiro steps and devil's-staircase behavior in driven charge-density-wave systems, Phys. Rev. Lett., 52 (1984) 2277-2280.

[33] P. Alstrom, M.H. Jensen and M.T. Levinsen, Fractal structure of subharmonic steps in a Josephson junction: an analog computer calculation, Phys. lett, 103A (1984) 171-174.

[34] J. Stavans, F. Heslot and A. Libchaber, Fixed winding number and the quasiperiodic route to chaos in a convective fluid, Phys. Rev. Lett., 55 (1985) 596-599.

[35] O. Biham and Mukamel, Global universality in the Frenkel-Kontorava model, Phys. Rev., 39A (1985) 5326-5335.

[36] 张广才，可激媒质非线性动力学的研究（中国工程物理研究院北京研究生部，博士论文，1997).

[37] H.X. Wang, R.D. Paola and W.I. Norwood, Dynamics underlying the patterning of cardiac dysrhythmias, Phys. Rev. lett., 70 (1993) 3671-3674.

[38] G. Matsumoto, K. Aihara, Y. Hanyu, Takahashi, S. Yoshizawa and J. Nagumo, Chaos and phase locking in normal squid axons, Phys. Lett., 123 (1987) 162-166.

[39] K. Aihara, T. Takabe and M. Toyoda, Chaotic neural networks, Phys. Lett., 144A (1990) 333-340.

[40] J.P. Keener, F.C. Hoppensteadt and J. Rinzel, Integrate-and-fire models of nerve membrane response to oscillatory input, SIAM J. Appl. Math., 41 (1981) 503-517.

[41] A. Cumming and P.S. Linsay, Deviations from universality in the transition from quasiperiodicity to chaos, Phys. Rev. Lett., 59 (1987) 1633-1636.

[42] B. Christiansen, P. Alstrom and M.T. Levinsen, Routes to chaos and complete phase locking in modulatel relaxation oscillators, Phys. Rev., 42 (1990) 1891-1900.

[43] S. Kim, R.S. Mackay and J. Guckenheimer, Resonance regions for families of torus maps, Nonlinearity, 2 (1989) 391-404.

[44] C. Grebogi, E. Ott and J.A. Yorke, Attractors on an n-torus: quasiperiodicity versus chaos, Physica, 15D (1985) 354-373.

[45] A. Cumming and P.S. Linsay, Quasiperodicity and chaos in a system with three competing frequencies, Phys. Rev. Lett., 60 (1988) 2719-2722.

[46] B. Hu and J.M. Mao, Transitions to chaos in higher dimensions (载于 B.L. Hao ed. Directions in chaos, Singapore,World Scientific, 1988)
[47] S.H. Kim and S. Ostlund, Renormalization of mappings of the two-torus, Phys. Rev. Lett., 55 (1985) 1165-1168.
[48] S.G. Chen and Y.Q. Wang, Cubic irrational number and critical scaling law for quasiperiodic motions, Phys. Lett., 153 (1991) 113-116.
[49] M.Z. Ding, C.Grebogi and E.Ott, Evolution of attractors in quasiperiodically force systems: From quasiperiodic to strange nonchaotic to chaos, Phys. Rev., 39A (1989) 2593-2598.
[50] P.R. Chastell, P.A. Glendinning and J. Stark, Locating bifurcations in quasiperiodically forced systems, Phys. Lett., 200A (1995) 17-26.
[51] U. Feudel, C. Grebogi and E. Ott, Phase-locking in quasiperiodically forced systems, Phys. Reports, 290 (1997) 11-25.
[52] F.J. Romeiras and E. Ott, Strange nonchaotic attractors of the damped pendulum with quasiperiodic forcing, Phys. Rev., A35 (1987) 4404-4413.
[53] G.A. Held and C. Jeffries, Quasiperiodic transitions to chaos of instabilities in an electron-hole plasma excited by ac perturbations at one and at two frequoncies, Phys. Rev. Lett., 56 (1986) 1183-1186.
[54] W.L. Ditto, M.L. Spano, H.T. Savage, S.N. Rauseo, J. Heagy and E. Ott, Experimental observation of a strange nonchaotic attractor, Phys. Rev. Lett., 65 (1990) 533-536.
[55] F.J. Romeiras, A. Bondeson, E. Ott, T.M. Antonsen Jr and C. Grebogi, Quasiperiodically forced dynamical systems with strange nonchaotic attractors, Phyica, 26D (1987) 277-294.
[56] P.C. Bressloff and J. Stark, Neuronal dynamics based on discontinuous circle maps, Phys. Lett., A150 (1990) 187-195.